6.2.Уравнение Бернулли.

6.2.1. Уравнение движения жидкости.

Раздел физики, изучающий движение жидкостей, называют *гидродинамикой*. В гидродинамике жидкость рассматривается как сплошная среда, т.е. используется макроскопический подход. Иначе говоря, рассматривается перемещение физически бесконечно малых элементов объема жидкости, содержащих большое число молекул.

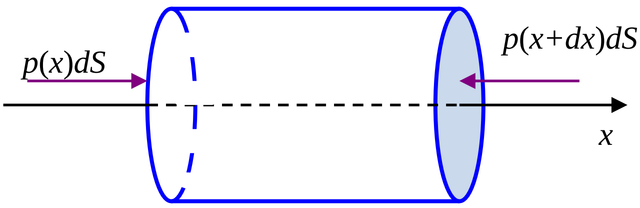

Рис. 2.1.

В этом пункте рассмотрим течение идеальной жидкости, которая несжимаема и в которой отсутствует внутреннее трение. Выделим бесконечно малый объем жидкости dV и его движение вдоль оси x. Пусть форма этого выделенного объема составляет цилиндр длины dx и с площадью основания dS (см рис. 2.1). Результирующая сила, действующая вдоль оси x на выделенный объем $dV = dxdS$, равна:

$$dF_x = \left[p(x) - p(x+dx)\right]dS_x \tag{6.2.1}$$

где $p(x)dS$ – сила, действующая на левое основание цилиндра, а $p(x+dx)dS$ – на правое. Разделив и умножив правую часть (6.2.1) на dx, получаем:

$$dF_x = \frac{\left[p(x) - p(x+dx)\right]dS_x dx}{dx} = -\frac{\partial p}{\partial x}dV \tag{6.2.2}$$

Аналогичным путем можно получить и другие компоненты силы:

$$dF_y = -\frac{\partial p}{\partial y}dV \qquad\qquad dF_z = -\frac{\partial p}{\partial z}dV \tag{6.2.3}$$

Полная сила получается векторным суммированием компонент силы:

$$d\vec{F} = dF_x\vec{e}_x + dF_y\vec{e}_y + dF_z\vec{e}_z = -\left(\vec{e}_x\frac{\partial}{\partial x} + \vec{e}_y\frac{\partial}{\partial y} + \vec{e}_z\frac{\partial}{\partial z}\right)p\cdot dV = -\nabla p\cdot dV \tag{6.2.4}$$

Итак, полная сила, действующая на элемент объема, определяется градиентом давления.

С другой стороны, по второму закону Ньютона имеем:

$$d\vec{F} = \Delta m\frac{d\vec{v}}{dt} = \rho dV\frac{d\vec{v}}{dt} \tag{6.2.5}$$

где ρ – плотность жидкости, $d\vec{v}/dt$ – ускорение объема dV. Откуда из (6.2.4) и (6.2.5) получаем уравнение движения для единицы объема идеальной жидкости:

$$\rho\frac{d\vec{v}}{dt} = -\nabla p \tag{6.2.6}$$

Это уравнение движения идеальной жидкости называется *уравнением Эйлера*. Оно было получено Эйлером и является одним из основных уравнений гидродинамики. При рассмотрении конкретных задач к решению этого уравнения необходимо добавить граничные условия на стенках, ограничивающих жидкость. На неподвижных стенках обращается в нуль нормальная к поверхности стенки составляющая скорости жидкости $v_n = 0$.

Если жидкость находится в поле силы тяжести, то на единицу ее объема действует дополнительная сила тяжести ρg, где g – ускорение свободного падения. Тогда уравнение Эйлера принимает вид:

$$\rho\frac{d\vec{v}}{dt} = -\nabla p + \rho g \tag{6.2.7}$$

Рассмотрим *стационарное*, или *установившееся*, движение жидкости. Это означает, что в выбранной точке скорость постоянна во времени, однако в разных точках скорости движения жидкости могут быть разными. Если выберем одну точку пространства, то скорости всех частиц (молекул), проходящих через эту точку, одинаковы. В последующих точках скорости молекул в общем случае другие, но опять одинаковые для всех проходящих частиц. Можно построить кривую, описывающую траекторию каждой частицы, в каждой точке которой касательная к ней определяет направление мгновенной скорости частиц. Такая кривая называется *линией тока*. В стационарном режиме линии тока не пересекаются, и их рисунок остается постоянным во времени.

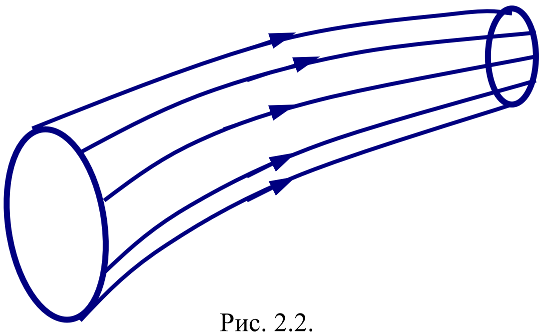

Рис. 2.2.

Если выделить замкнутый контур и через каждую точку контура провести линию тока, то линии, проходящие через этот контур, образуют так называемую *трубку тока*. У этой трубки тока (рис. 2.2) есть боковая поверхность, образованная крайними линиями тока, и жидкость не может пересекать эту боковую поверхность. В силу закона сохранения массы для стационарного течения потоки несжимаемой жидкости через два любых сечения трубки S_1 и S_2 одинаковы:

$$\rho v_1 S_1 = \rho v_2 S_2$$

Откуда получаем:

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{S_2}{S_1} \tag{6.2.8}$$

Итак, скорость жидкости больше в более узких сечениях трубки тока, где линии тока идут гуще.

6.2.2. Уравнение Бернулли.

Рассмотрим стационарное течение идеальной жидкости в поле силы тяжести. Выделив в жидкости трубку тока и учитывая ее несжимаемость, можно записать для элемента объема ΔV_1 при его перемещении в другую область пространства:

$$\Delta V_1 = \Delta V_2$$
$$S_1 \Delta x_1 = S_2 \Delta x_2 \tag{6.2.9}$$

Здесь S_1 и S_2 – сечения трубки тока в начальной и последующей областях, Δx_1 и Δx_2 – изменение продольной составляющей малых объемов. Выделенный элемент жидкости движется и, следовательно, обладает кинетической энергией. Изменение кинетической энергии всего выделенного объема при перемещении равно:

$$\frac{m}{2}\left(v_2^2 - v_1^2\right) \tag{6.2.10}$$

где v_1 и v_2 – скорости жидкости на концах выделенного объема.

При движении жидкости происходит изменение положения ее элементов объема по высоте. Изменение потенциальной энергии всего выделенного объема за счет изменения высоты равно

$$mg\left(h_2 - h_1\right) \tag{6.2.11}$$

где h_1 и h_2 – высоты, на которых располагаются объемы ΔV_1 и ΔV_2 над поверхностью Земли.

Движение выделенного элемента объема происходит за счет давления на него со стороны жидкости. Работа, совершенная жидкостью над этим элементом, равна $p_1 S_1 \Delta x_1$. С другой стороны выделенный объем давит на жидкость в другую сторону и работа, совершенная им равна $p_2 S_2 \Delta x_2$. Полная работа, совершенная над выделенным объемом, равна:

$$\left(p_1 - p_2\right)\Delta V = \left(p_1 - p_2\right)\frac{m}{\rho} \tag{6.2.12}$$

Эта работа равна изменению суммы кинетической и потенциальной энергии объема:

$$\left(p_1 - p_2\right)\frac{m}{\rho} = \frac{m}{2}\left(v_2^2 - v_1^2\right) + mg\left(h_2 - h_1\right) \tag{6.2.13}$$

Иначе это уравнение можно записать в виде:

$$p_1 + \rho\frac{v_1^2}{2} + \rho g h_1 = p_2 + \rho\frac{v_2^2}{2} + \rho g h_2 \tag{6.2.14}$$

Отсюда следует, что вдоль линии тока при стационарном течении сохраняется величина:

$$p + \rho\frac{v^2}{2} + \rho g h = const \tag{6.2.15}$$

Получили *уравнение Бернулли* – фундаментальное уравнение механики жидкости, выражающее закон сохранения энергии Его можно также вывести из уравнения Эйлера.

При течении по горизонтальной трубке переменного сечения имеем:

$$p + \rho\frac{v^2}{2} = const \tag{6.2.16}$$

Согласно этой формуле *давление жидкости тем меньше, чем больше ее скорость*. Скорость больше в трубке с более узким сечением. С точки зрения линий тока: при обтекании тела жидкостью (или потоком воздуха) действует подъемная сила в направлении области, где гуще линии тока жидкости.

Примечание 1. *Леонард Эйлер, швейцарский, немецкий и российский математик, механик и физик, 1707–1783, работал в Петербурге в 1727–1741 и в 1766-1783 г.г.; с 1766 г. академик Петербургской академии наук;*

Даниил Бернулли, швейцарский математик и физик, 1700–1782, академик и иностранный почётный член (1733) Петербургской академии наук, работал в Петербурге в 1725–1733 гг.
