6.3. Течение вязкой жидкости.

6.3.1. Скорость движения жидкости в трубке.

До сих пор полагали, что скорость движения одинакова на всем сечении трубки. В реальности из-за вязкости скорость течения жидкости различна у стенок и вдали от них. Если ввести поперечную (перпендикулярную к вектору скорости движения) координату x, то скорость жидкости есть функция этой координаты $v(x)$ (рис. 3.1). Эта зависимость определяется передачей импульса в поперечном направлении или иначе градиентом скорости, как и в случае вязкого газа (см параграф 5.4):

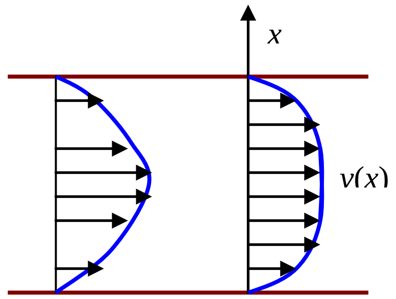

Рис. 3.1.

$$j_p = -\eta \frac{dv}{dx} \tag{6.3.1}$$

Сила взаимодействия соседних слоев, соприкасающихся по поверхности S, равна:

$$F = \eta \frac{dv}{dx} S \tag{6.3.2}$$

где η – *коэффициент вязкости*. Как упоминалось в параграфе 5.4. коэффициент вязкости в системе СГС (CGSE) измеряется в *Пуазах*:

$$1\ \textit{Пз} = 1\ \textit{Дн}\cdot\textit{с}/\textit{см}^2 = 1\ \textit{г}/\textit{см}\cdot\textit{с}$$

Связь с единицами в системе СИ

$$1\ \text{Па}\cdot\text{с} = 10\ \textit{Пз}$$

Приведем типичные значения коэффициента вязкости для ряда веществ:

Hg	$\eta = 0.0156\cdot 10^{-2}\ \textit{Пз}$
Вода	$\eta = 0.010\cdot 10^{-2}\ \textit{Пз}$
Воздух	$\eta = 0.00018\cdot 10^{-2}\ \textit{Пз}$

Коэффициент вязкости η показывает, насколько быстро импульс передается из одного слоя в другой.

Иногда вводится *кинематическая вязкость* ν:

$$\nu = \frac{\eta}{\rho}$$

где ρ – плотность вещества. Размерность кинематической вязкости совпадает с размерностью коэффициента диффузии

$$[\nu] = \textit{см}^2/\textit{с}$$

Фактически кинематическая вязкость ν – коэффициент диффузии для скорости.

Итак, сосчитаем скорости потока жидкости в зависимости от расстояния до стенок. Для этого рассмотрим круглую трубу, в которой распространяется жидкость. Выделим трубку тока на расстоянии r от центра оси симметрии и длиной l (рис. 3.2). Сила внутреннего трения, действующая на выделенный объем жидкости равна:

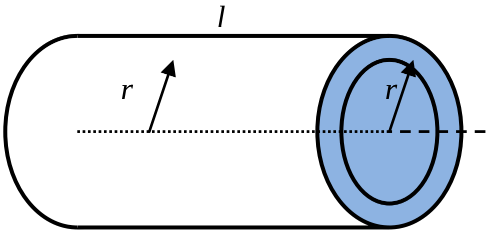

Рис. 3.2.

$$2\pi r\cdot l\cdot j_p = -2\pi r l\cdot\eta\frac{dv}{dr} \tag{6.3.3}$$

При стационарном течении эта сила компенсируется силой давления на концах выделенной трубки тока:

$$2\pi r l\cdot\eta\frac{dv}{dr} = -\pi r^2\Delta p \tag{6.3.4}$$

Полученное уравнение

$$\frac{dv}{dr} = -\frac{r}{2\eta l}\Delta p$$

проинтегрируем, считая, что разность давлений постоянна:

$$dv = -\left(\frac{\Delta p}{2\eta l}\right) r dr$$

$$v(r) = -\frac{r^2 \Delta p}{4\eta l} + const \tag{6.3.5}$$

Постоянную интегрирование определим исходя из условия, что в пристеночной области трубы (т.е. при $r = R$) жидкость не движется и ее скорость движения равна нулю:

$$v(r)\big|_{r=R} = 0 \tag{6.3.6}$$

Таким образом, получаем зависимость скорости течения жидкости в зависимости от радиуса r

$$v(r) = \frac{\Delta p}{4\eta l}\left(R^2 - r^2\right) \tag{6.3.7}$$

Максимальная скорость течения жидкости вдоль оси трубы при $r = 0$:

$$v_{max} = v_0 = \frac{\Delta p R^2}{4\eta l} = \frac{(p_2 - p_1)R^2}{4\eta l}$$

Откуда получаем

$$v(r) = v_0\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) \tag{6.3.8}$$

В результате мы получаем параболическую зависимость скорости жидкости от радиуса. Такая зависимость определяет *ламинарное течение* жидкости, когда слои, движущиеся со своей стационарной скоростью, не перемешиваются. Когда получаем сильное перемешивание слоев жидкости, что приводит к искажению стационарного распределения скорости, то имеем дело с *турбулентным течением* жидкости.

Каково количество жидкости протекает за 1 секунду через поперечное сечение при ламинарном течении? Элементарный объем, проходящий за единицу времени, через малое сечение $dS = 2\pi r dr$ (кольцо см рис. 3.3) равен:

$$dV = v(r)dS = v(r)2\pi r dr = v(r)\pi d\left(r^2\right) = \frac{\pi \Delta p}{4\eta l}\left(R^2 - r^2\right)d\left(r^2\right) \tag{6.3.9}$$

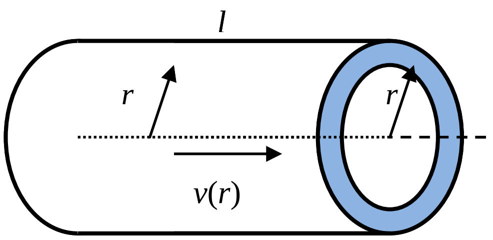

Рис. 3.3.

Интегрируя, получаем:

$$V(r) = \frac{\pi \Delta p}{4\eta l}\left(R^2 - \frac{r^2}{2}\right)r^2 \tag{6.3.10}$$

Полный поток жидкости через всю трубу определяется при $r = R$

$$V = \frac{\pi \Delta p R^4}{8\eta l} \tag{6.3.11}$$

Масса, протекающей жидкости, определяется умножением на плотность жидкости ρ:

$$M = \rho V = \frac{\pi \rho \Delta p R^4}{8\eta l} \tag{6.3.12}$$

Это формула Пуазейля.

6.3.2. Ламинарное и турбулентное течение. Силы сопротивления.

Физические свойства жидкости определяются ее плотностью ρ и вязкостью η. Когда возникает *турбулентность*? Это зависит от основных характеристик и условий протекания жидкости. Например, когда скорость возрастает, или увеличиваются размеры труб и препятствий, то возникает турбулентное течение.

Перечислим основные параметры, которые определяют условия протекания жидкости.

1). Плотность ρ ($г/см^3$)

2). Вязкость η ($г/см \cdot с$)

3). Скорость течения v ($см/с$)

4). Размер R ($см$)

Здесь вводим один характерный размер трубы, т.е. предполагается, что длина и поперечный размер величины одного порядка $l \sim R$.

Из этих величин можно составить безразмерную комбинацию – *число Рейнольдса*:

$$Re = \frac{\rho v R}{\eta} \qquad (6.3.13)$$

Величина этого числа характеризует условия ламинарности и турбулентности течения жидкости. Физический смысл числа Рейнольдса – оно определяет соотношение сил вязкого трения и силы инерции жидкости. В самом деле, оценка силы вязкого трения (6.3.2) имеет вид при $l \sim R$:

$$F_{тр} = \eta \frac{dv}{dr} S \sim \eta \frac{v}{R} Rl \sim \eta v R \qquad (6.3.14)$$

Сила инерции может быть оценена следующим образом:

$$ma \sim \rho R^3 \frac{v}{t} \sim \rho R^3 \frac{v}{R/v} \approx \rho R^2 v^2 \qquad (6.3.15)$$

Из (6.3.14) и (6.3.15) видно, что число Рейнольдса получается из отношения силы инерции к силе вязкого трения. Для малых значений числа Рейнольдса ($Re \sim 0.1 \div 10$) при движении жидкости важна ее вязкость и тогда имеем ламинарное течение жидкости . Однако ламинарное течение сохраняется до чисел $Re < 1000$. При больших числах Рейнольдса $Re > 1000 \div 2000$ вязкость уменьшается (за исключением пограничного слоя), возникают вихри и отрыв жидкости от стенок и т.д. – турбулентное течение.

Метод размерности, с помощью которого было записано число Рейнольдса, можно применять при оценке сопротивления движущихся объектов внутри жидкости. В самом деле, размерность силы определяется в выражениях для силы трения и инерции (6.3.14) и (6.3.15). Поэтому сила сопротивления движущегося объекта внутри жидкости может быть записана:

$$F = \rho v^2 R^2 f(Re) \qquad (6.3.16)$$

где R – характерный размер объекта, ρ– плотность жидкости, v – относительная скорость движения тела и жидкости, $f(Re)$ – какая-то функция от безразмерного параметра.

При малых скоростях тела сила сопротивления пропорциональна первой степени скорости v, а функция $f(Re)$ равна:

$$f(Re) = \frac{const}{Re} \qquad (6.3.17)$$

В частности, для шара эта постоянная равна

$$const = 6\pi .$$

Отсюда получаем силу сопротивления шара радиуса R при его движении в жидкости со скоростью v:

$$F = 6\pi\eta R v \qquad (6.3.18)$$

Это – *формула Стокса*.

Еще важный пример появления сил при движении тел в жидкостях и газах – подъемная сила.

Примечание 1. *Жан Луи Мари Пуазейль, французский физик. 1799–1869*;
Осборн Рейнольдс, английский физик, 1842–1912;
Джордж Габриэль Стокс, английский физик и математик, 1819–1903
