

## Глава 6. ЭЛЕМЕНТЫ МЕХАНИКИ ЖИДКОСТИ.

### 6.1. Строение жидкостей.

#### 6.1.1. Структура жидкостей.

Жидкое состояние сочетает в себе некоторые черты газового и твердого состояний, занимая промежуточное положение между ними. Можно провести сравнение между различными фазами и найти общие черты и различия. Так, между **газами и жидкостями** можно найти следующие **общие черты**:

- 1) газ и жидкость не имеют собственной формы (принимают форму сосуда),
- 2) текучие состояния у обеих фаз,
- 3) молекулы газа и жидкости перемещаются на большие расстояния (у этих фаз сравнимы скорости молекул и дальность диффузии),
- 4) обе фазы характеризуются изотропией.

Можно отметить **общие черты между жидкостями и твердыми телами**, которые не присущи газам. У обеих фаз:

- 1) имеется собственный объем,
- 2) наблюдается слабая сжимаемость,
- 3) имеется большая плотность вещества (относительно слабо меняется с давлением),
- 4) проявляется большое сопротивление сжатию и растяжению.

Все эти черты и свойства обусловлены внутренней структурой жидкости.

Так, для твердых кристаллов характерно упорядоченное расположение атомов или молекул. Этот порядок наблюдается на очень больших расстояниях по сравнению с расстоянием между соседними атомами, поэтому говорят, что для кристаллических тел имеет место **дальний порядок**. Для газовой фазы характерен полный хаос в отношении расположения молекул друг относительно друга. Для жидкостей расположение соседних молекул по отношению к рассматриваемой молекуле наблюдается некоторый порядок, который исчезает по мере удаления от рассматриваемой молекулы. Поэтому говорят, что в жидкостях имеет место **ближний порядок**.

Вообще такое разделение в ряде случаев является условным. Поскольку из-за большого разнообразия веществ и промежуточных их форм иногда трудно классифицировать фазы по этим признакам. Так, существуют твердые тела, находящиеся в **аморфном состоянии**, для которых также имеет место только ближний порядок в расположении молекул. Они и по своим свойствам близки к свойствам жидких состояний. Пример, стекло, смолы. С другой стороны, существуют **жидкие кристаллы**, молекулы которых имеют

обычно удлинённую форму и выстраиваются в одном направлении, т.е. получаем ориентированную жидкость. Для них также характерен ближний порядок, касающийся расположения молекул, однако молекулярная ориентация сохраняется на достаточно больших расстояниях по сравнению с обычными жидкостями, поэтому они обладают анизотропными свойствами.

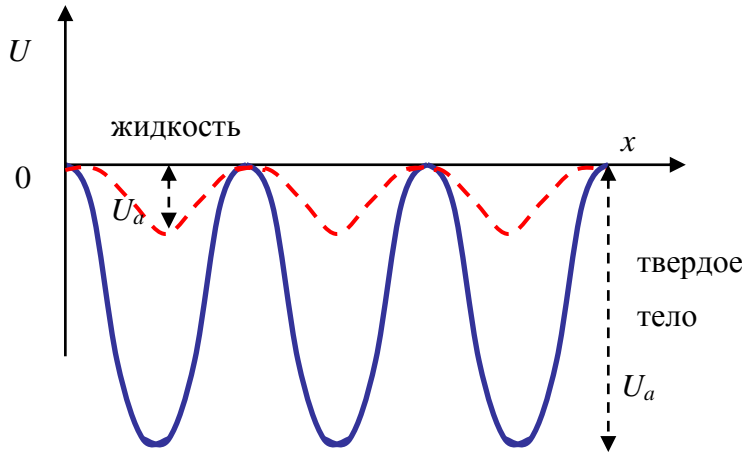


Рис. 1.1.

Причины отсутствия дальнего порядка у жидкостей состоит в том, что молекулы в жидкостях обладают меньшей *энергией активации*  $U_a$ . На рис. 1.1 показана примерная зависимость потенциальной энергии молекул (атомов) в твердом теле и жидкостях. Энергия активации может быть оценена как энергия, которую необходимо сообщить молекуле для ее

«вылета» из своей потенциальной ямы.

Значительный вклад в развитие теории жидкого состояния внес Я.И.Френкель. Согласно его представлениям, каждая молекула в жидкости в течение определенного времени колеблется около своего положения равновесия, а затем совершает переход скачком в новое положение, отстоящее от предыдущего на расстоянии порядка размеров самих молекул. Меньшая энергия активации приводит к большей вероятности активации

$$P_a = C \exp\left(-\frac{U_a}{kT_k}\right) \quad (6.1.1)$$

С другой стороны, вероятность активации пропорциональна отношению частоты «перескоков»  $\nu_{переск}$  к частоте колебаний молекулы  $\nu_{колеб}$  около положения равновесия

$$P_a \sim \frac{\nu_{переск}}{\nu_{колеб}} \sim \frac{\tau_0}{\tau} \quad (6.1.2)$$

где  $\tau$  – время перескоков,  $\tau_0$  – период колебаний. Время  $\tau$  фактически определяет время релаксации; при этом из (6.1.1) и (6.1.2) имеем

$$\tau = \tau_0 \exp\left(\frac{U_a}{kT_k}\right) \gg \tau_0.$$

Длительность колебаний и пребывания молекулы в одном положении различна для разных веществ. Большое время релаксации приводит к

большей вязкости  $\eta$ . С ростом температуры подвижность молекул резко возрастает, что приводит к уменьшению вязкости жидкостей.

С точки зрения потенциальной энергии молекулы, находящиеся внутри жидкости, обладают меньшей энергией по отношению к молекулам, находящимся вне или на поверхности жидкости.

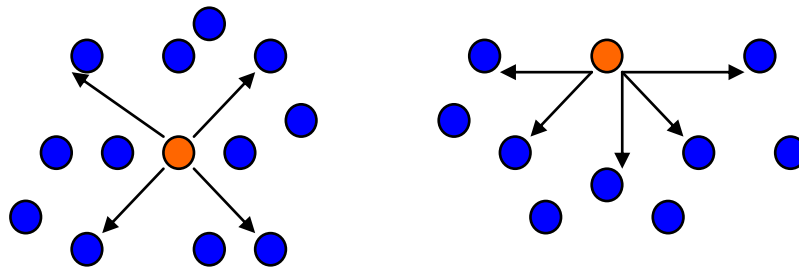
---

Примечание 1. *Яков Ильич Френкель, советский физик-теоретик, 1894–1952;* с 1921 г. работал в ФТИ им. А.Ф.Иоффе и преподавал в Политехническом институте, заведовал кафедрой теоретической физики

---

### 6.1.2. Поверхностное натяжение.

Каждая молекула испытывает притяжение со стороны всех соседних с ней молекул в пределах сферы молекулярного действия. Эта сфера обычно невелика, поскольку силы взаимодействия между молекулами быстро убывают с расстоянием. На молекулу, находящуюся внутри жидкости, действуют силы со стороны окружающих молекул внутри сферы молекулярного действия. Эти силы в большой мере скомпенсированы (см рис. 1.2а) в силу изотропного распределения окружающих молекул. На молекулу, находящуюся на поверхности, со стороны других молекул действует суммарная сила, направленная от поверхности внутрь жидкости (рис. 1.2б).



а) силы, действующие на молекулу в объеме

б) силы, действующие на молекулу на поверхности

Рис. 1.2.

С точки зрения энергии молекулы в поверхностном слое обладают дополнительной потенциальной энергией. Таким образом, поверхностный слой в целом обладает энергией, которая входит составной частью во внутреннюю энергию жидкости. Положение равновесия соответствует минимуму потенциальной энергии. Из-за наличия поверхностной энергии жидкость стремится к сокращению своей поверхности.

Рассмотрим проволочную подвижную рамку, на которую натянута мыльная пленка. На подвижную сторону рамки подвешен

уравновешивающий груз, как это показано на рисунке 1.3. Сила натяжения пленки  $\vec{F}$ , действующая на подвижную сторону, пропорциональна ее длине:  $F \sim l$ . Однако, поскольку у мыльной пленки 2 поверхности, то условия равновесия можно записать:

$$mg = 2F = 2\alpha l \quad (6.1.3)$$

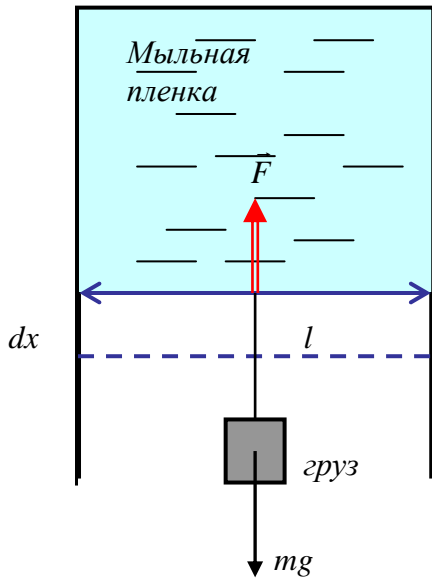


Рис. 1.3.

Здесь мы ввели *коэффициент поверхностного натяжения*  $\alpha$

$$\alpha = \frac{F}{l} \quad (6.1.4)$$

Коэффициент поверхностного натяжения – сила поверхностного натяжения, приходящаяся на единицу длины контура, охватывающего жидкость. Работа, совершаемая силами натяжения при перемещении рамки, равна:

$$dA = Fdx = \alpha l dx = \alpha dS \quad (6.1.5)$$

Отсюда следует, что энергия растянутой поверхности пропорциональна площади.

Напомним, что работа внешних сил при обратимом изотермическом процессе равна убыли свободной энергии  $F$ :

$$d'A = -\alpha dS = -dF \quad (6.1.6)$$

### 6.1.3. Давление под изогнутой поверхностью.

Вычислим добавочное давление для сферической поверхности жидкости – для сферической капли радиуса  $R$ . Мысленно разобьем шар на 2 произвольных полушария. Из-за поверхностного натяжения оба полушария притягиваются друг к другу с силой:

$$F = \alpha l = 2\pi R\alpha \quad (6.1.7)$$

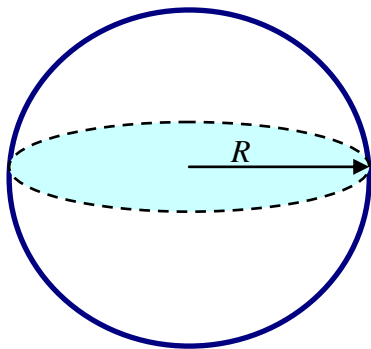


Рис. 1.4.

Эта сила прижимает друг к другу оба полушария по поверхности  $S = \pi R^2$  и, следовательно, обуславливает дополнительное давление:

$$\Delta p = \frac{F}{S} = \frac{2\pi R\alpha}{\pi R^2} = \frac{2\alpha}{R} \quad (6.1.8)$$

Если имеем дело с произвольной поверхностью, тогда вводится средняя кривизна поверхности в данной точке:

$$H = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \quad (6.1.9)$$

где  $R_1$  и  $R_2$  – радиусы кривых пересечения, полученных при двух взаимно перпендикулярных нормальных сечениях поверхности. В геометрии доказывается, что  $H$  остается одной и той же величиной для любой пары таких взаимно перпендикулярных нормальных сечений. Тогда дополнительное давление, оказываемое изогнутой поверхностью, определяется формулой Лапласа:

$$\Delta p = \alpha \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \quad (6.1.10)$$

#### 6.1.4. Смачиваемость. Капиллярные явления.

При соприкосновении жидкости с поверхностью твердого тела необходимо учитывать силы взаимодействия между молекулами жидкости и твердого тела. При этом возможны два случая:

- 1) силы взаимодействия между молекулами жидкости больше, чем силы взаимодействия между молекулами жидкости и твердого тела;
- 2) силы взаимодействия между молекулами жидкости меньше, чем силы взаимодействия между молекулами жидкости и твердого тела.

Если граничат друг с другом сразу три вещества, то система принимает конфигурацию, соответствующую минимуму суммарной энергии. Так, равновесие жидкости и газа, расположенных на поверхности твердого тела,

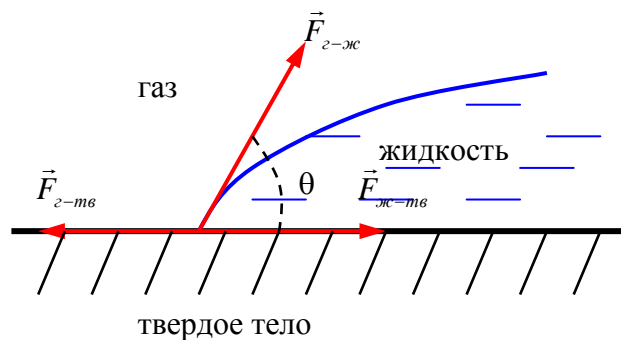


Рис. 1.5.

определяется равенством сил поверхностного натяжения, приложенных к каждому элементу контура-границы. На рис. 1.5 для примера показана такая граница трех сред. Пусть эта граница рассматривается на элементе длины  $\Delta l$ , тогда условие равновесия записывается как равенство проекций сил поверхностного натяжения:

$$\Delta l \cdot \alpha_{т-г} = \Delta l \cdot \alpha_{т-ж} + \Delta l \cdot \alpha_{ж-г} \cos \vartheta \quad (6.1.11)$$

Здесь  $\alpha_{т-г}$ ,  $\alpha_{т-ж}$  и  $\alpha_{ж-г}$  – коэффициенты поверхностного натяжения на границе: твердое тело – газ, твердое тело – жидкость, жидкость – газ. Угол  $\vartheta$  – угол между касательными к поверхности твердого тела и поверхности жидкости – *краевой угол*. Он определяется соотношением

$$\cos \vartheta = \frac{\alpha_{т-г} - \alpha_{т-ж}}{\alpha_{ж-г}} \quad (6.1.12)$$

Краевой угол определяется только при условии, что

$$\frac{|\alpha_{m-z} - \alpha_{m-ж}|}{\alpha_{ж-z}} \leq 1 \quad (6.1.13)$$

Если это условие не выполняется, то нет равновесия на этой границе веществ.

Если  $\alpha_{m-z} > \alpha_{m-ж} + \alpha_{ж-z}$ , то жидкость неограниченно растекается по поверхности твердого тела. Это явление носит название *полного смачивания*. При полном смачивании краевого угол равен нулю.

При условии  $\alpha_{m-ж} > \alpha_{m-z} + \alpha_{ж-z}$  имеет явление *полного несмачивания*. В этом случае поверхность, по которой жидкость граничит с твердым телом, стягивается в точку, при этом краевой угол равен  $\pi$ .

Существование краевого угла приводит к тому, что вблизи стенок сосуда наблюдается искривление поверхности жидкости. Рассматривая жидкость в узкой трубке – *капилляре* – имеем 2 основные возможности формы поверхности жидкости – *мениска*. Если жидкость смачивает стенки, то поверхность имеет вогнутую форму. Если жидкость не смачивает стенки капилляра, то поверхность жидкости имеет выпуклую форму.

Изменение высоты уровня жидкости в капиллярах носит название *капиллярных явлений*. Если капилляр поместить в широкий сосуд с жидкостью, то под искривленной поверхностью в капилляре давление будет отличаться от давления над плоской поверхностью в широком сосуде на величину  $\Delta p$ , определяемую формулой Лапласа. В результате при смачивании уровень жидкости в капилляре будет выше, чем в сосуде. При несмачивании этот уровень будет ниже уровня в сосуде. Между жидкостью в капилляре и широком сосуде устанавливается такая разность уровней  $h$ , чтобы гидростатическое давление уравновешивало капиллярное давление  $\Delta p$ :

$$\rho gh = \frac{2\alpha}{R} \quad (6.1.14)$$

где  $\rho$  – плотность жидкости,  $R$  – радиус кривизны мениска,  $\alpha$  – поверхностное натяжение на границе жидкость – газ. Отсюда можно определить высоту подъема жидкости в капилляре.

## 6.2. Идеальная жидкость. Уравнение Бернулли.

### 6.2.1. Уравнение движения жидкости.

Раздел физики, изучающий движение жидкостей, называют *гидродинамикой*. В гидродинамике жидкость рассматривается как сплошная среда, т.е. используется макроскопический подход. Иначе говоря, рассматривается перемещение физически бесконечно малых элементов объема жидкости, содержащих большое число молекул.

В этом пункте рассмотрим течение идеальной жидкости, которая несжимаема и в которой отсутствует внутреннее трение. Выделим бесконечно малый объем жидкости  $dV$  и его движение вдоль оси  $x$ . Пусть форма этого выделенного объема составляет цилиндр длины  $dx$  и с площадью основания  $dS$  (см рис. 2.1). Результирующая сила, действующая вдоль оси  $x$  на выделенный объем  $dV = dx dS$ , равна:

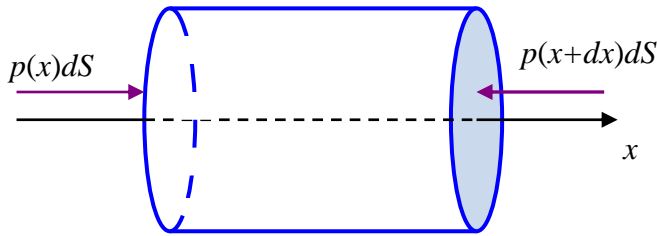


Рис. 2.1.

$$dF_x = [p(x) - p(x+dx)]dS_x \quad (6.2.1)$$

где  $p(x)dS$  – сила, действующая на левое основание цилиндра, а  $p(x+dx)dS$  – на правое. Разделив и умножив правую часть (6.2.1) на  $dx$ , получаем:

$$dF_x = \frac{[p(x) - p(x+dx)]dS_x dx}{dx} = -\frac{\partial p}{\partial x} dV \quad (6.2.2)$$

Аналогичным путем можно получить и другие компоненты силы:

$$dF_y = -\frac{\partial p}{\partial y} dV \quad dF_z = -\frac{\partial p}{\partial z} dV \quad (6.2.3)$$

Полная сила получается векторным суммированием компонент силы:

$$d\vec{F} = dF_x \vec{e}_x + dF_y \vec{e}_y + dF_z \vec{e}_z = -\left(\vec{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z}\right)p \cdot dV = -\nabla p \cdot dV \quad (6.2.4)$$

Итак, полная сила, действующая на элемент объема, определяется градиентом давления.

С другой стороны, по второму закону Ньютона имеем:

$$d\vec{F} = \Delta m \frac{d\vec{v}}{dt} = \rho dV \frac{d\vec{v}}{dt} \quad (6.2.5)$$

где  $\rho$  – плотность жидкости,  $d\vec{v}/dt$  – ускорение объема  $dV$ . Откуда из (6.2.4) и (6.2.5) получаем уравнение движения для единицы объема идеальной жидкости:

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = -\nabla p \quad (6.2.6)$$

Это уравнение движения идеальной жидкости называется *уравнением Эйлера*. Оно было получено Эйлером и является одним из основных уравнений гидродинамики. При рассмотрении конкретных задач к решению этого уравнения необходимо добавить граничные условия на стенках, ограничивающих жидкость. На неподвижных стенках обращается в нуль нормальная к поверхности стенки составляющая скорости жидкости  $v_n = 0$ .

Если жидкость находится в поле силы тяжести, то на единицу ее объема действует дополнительная сила тяжести  $\rho g$ , где  $g$  – ускорение свободного падения. Тогда уравнение Эйлера принимает вид:

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = -\nabla p + \rho g \quad (6.2.7)$$

Рассмотрим *стационарное*, или *установившееся*, движение жидкости. Это означает, что в выбранной точке скорость постоянна во времени, однако в разных точках скорости движения жидкости могут быть разными. Если выберем одну точку пространства, то скорости всех частиц (молекул), проходящих через эту точку, одинаковы. В последующих точках скорости молекул в общем случае другие, но опять одинаковые для всех проходящих частиц. Можно построить кривую, описывающую траекторию каждой частицы, в каждой точке которой касательная к ней определяет направление мгновенной скорости частиц. Такая кривая называется *линией тока*. В стационарном режиме линии тока не пересекаются, и их рисунок остается постоянным во времени.

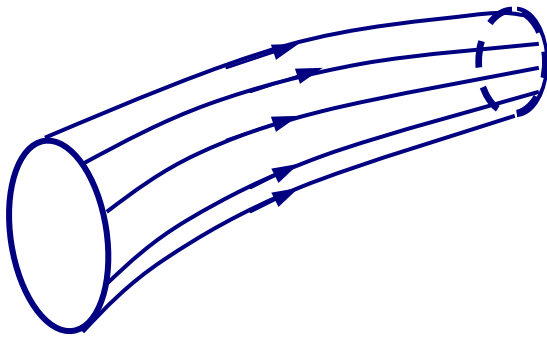


Рис. 2.2.

Если выделить замкнутый контур и через каждую точку контура провести линию тока, то линии, проходящие через этот контур, образуют так называемую *трубку тока*. У этой трубки тока (рис. 2.2) есть боковая поверхность, образованная крайними линиями тока, и жидкость не может пересекать эту боковую поверхность. В силу закона

сохранения массы для стационарного течения потоки несжимаемой жидкости через два любых сечения трубки  $S_1$  и  $S_2$  одинаковы:

$$\rho v_1 S_1 = \rho v_2 S_2$$

Откуда получаем:

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{S_2}{S_1} \quad (6.2.8)$$

Итак, скорость жидкости больше в более узких сечениях трубки тока, где линии тока идут гуще.

### 6.2.2. Уравнение Бернулли.

Рассмотрим *стационарное течение идеальной жидкости в поле силы тяжести*. Выделив в жидкости трубку тока и учитывая ее несжимаемость, можно записать для элемента объема  $\Delta V_1$  при его перемещении в другую область пространства:

$$\begin{aligned} \Delta V_1 &= \Delta V_2 \\ S_1 \Delta x_1 &= S_2 \Delta x_2 \end{aligned} \quad (6.2.9)$$

Здесь  $S_1$  и  $S_2$  – сечения трубки тока в начальной и последующей областях,  $\Delta x_1$  и  $\Delta x_2$  – изменение продольной составляющей малых объемов. Выделенный элемент жидкости движется и, следовательно, обладает кинетической энергией. Изменение кинетической энергии всего выделенного объема при перемещении равно:



$$\frac{m}{2}(v_2^2 - v_1^2) \quad (6.2.10)$$

где  $v_1$  и  $v_2$  – скорости жидкости на концах выделенного объема.

При движении жидкости происходит изменение положения ее элементов объема по высоте. Изменение потенциальной энергии всего выделенного объема за счет изменения высоты равно

$$mg(h_2 - h_1) \quad (6.2.11)$$

где  $h_1$  и  $h_2$  – высоты, на которых располагаются объемы  $\Delta V_1$  и  $\Delta V_2$  над поверхностью Земли.

Движение выделенного элемента объема происходит за счет давления на него со стороны жидкости. Работа, совершенная жидкостью над этим элементом, равна  $p_1 S_1 \Delta x_1$ . С другой стороны выделенный объем давит на жидкость в другую сторону и работа, совершенная им равна  $p_2 S_2 \Delta x_2$ . Полная работа, совершенная над выделенным объемом, равна:

$$(p_1 - p_2)\Delta V = (p_1 - p_2)\frac{m}{\rho} \quad (6.2.12)$$

Эта работа равна изменению суммы кинетической и потенциальной энергии объема:

$$(p_1 - p_2)\frac{m}{\rho} = \frac{m}{2}(v_2^2 - v_1^2) + mg(h_2 - h_1) \quad (6.2.13)$$

Иначе это уравнение можно записать в виде:

$$p_1 + \rho \frac{v_1^2}{2} + \rho gh_1 = p_2 + \rho \frac{v_2^2}{2} + \rho gh_2 \quad (6.2.14)$$

Отсюда следует, что вдоль линии тока при стационарном течении сохраняется величина:

$$p + \rho \frac{v^2}{2} + \rho gh = const \quad (6.2.15)$$

Получили *уравнение Бернулли* – фундаментальное уравнение механики жидкости, выражающее закон сохранения энергии. Его можно также вывести из уравнения Эйлера.

При течении по горизонтальной трубке переменного сечения имеем:

$$p + \rho \frac{v^2}{2} = const \quad (6.2.16)$$

Согласно этой формуле *давление жидкости тем меньше, чем больше ее скорость*. Скорость больше в трубке с более узким сечением. С точки зрения линий тока: при обтекании тела жидкостью (или потоком воздуха) действует подъемная сила в направлении области, где гуще линии тока жидкости.

Примечание 1. *Леонард Эйлер, швейцарский, немецкий и российский математик, механик и физик, 1707–1783, работал в Петербурге в 1727–1741 и в 1766-1783 гг.; с 1766 г. академик Петербургской академии наук;*

*Даниил Бернулли, швейцарский математик и физик, 1700–1782, академик и иностранный почётный член (1733) [Петербургской академии наук](#), работал в Петербурге в 1725–1733 гг.*

### 6.3. Течение вязкой жидкости.

#### 6.3.1. Скорость движения жидкости в трубке.

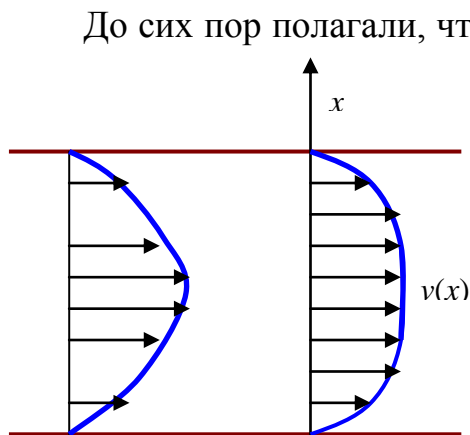


Рис. 3.1.

До сих пор полагали, что скорость движения одинакова на всем сечении трубки. В реальности из-за вязкости скорость течения жидкости различна у стенок и вдали от них. Если ввести поперечную (перпендикулярную к вектору скорости движения) координату  $x$ , то скорость жидкости есть функция этой координаты  $v(x)$  (рис. 3.1). Эта зависимость определяется передачей импульса в поперечном направлении или иначе градиентом скорости, как и в случае вязкого газа (см параграф 5.4):

$$j_p = -\eta \frac{dv}{dx} \quad (6.3.1)$$

Сила взаимодействия соседних слоев, соприкасающихся по поверхности  $S$ , равна:

$$F = \eta \frac{dv}{dx} S \quad (6.3.2)$$

где  $\eta$  – *коэффициент вязкости*. Как упоминалось в параграфе 5.4. коэффициент вязкости в системе СГС (CGSE) измеряется в Пуазах:

$$1 \text{ Пз} = 1 \text{ Дн} \cdot \text{с} / \text{см}^2 = 1 \text{ г} / \text{см} \cdot \text{с}$$

Связь единиц СГС с единицами в системе СИ записывается

$$1 \text{ Па} \cdot \text{с} = 10 \text{ Пз}$$

Приведем типичные значения коэффициента вязкости для ряда веществ:

$$\text{Hg} \quad \eta = 0.0156 \cdot 10^{-2} \text{ Пз}$$

$$\text{Вода} \quad \eta = 0.010 \cdot 10^{-2} \text{ Пз}$$

Воздух

$$\eta = 0.00018 \cdot 10^{-2} \text{ Пз}$$

Коэффициент вязкости  $\eta$  показывает, насколько быстро импульс передается из одного слоя в другой.

Иногда вводится *кинематическая вязкость*  $\nu$ :

$$\nu = \frac{\eta}{\rho}$$

где  $\rho$  – плотность вещества. Размерность кинематической вязкости совпадает с размерностью коэффициента диффузии

$$[\nu] = \text{см}^2/\text{с}$$

Фактически кинематическая вязкость  $\nu$  – коэффициент диффузии для скорости.

Итак, считаем скорости потока жидкости в зависимости от расстояния до стенок. Для этого рассмотрим круглую трубу, в которой распространяется жидкость. Выделим трубку тока на расстоянии  $r$  от центра оси симметрии и длиной  $l$  (рис. 3.2). Сила внутреннего трения, действующая на выделенный объем жидкости равна:

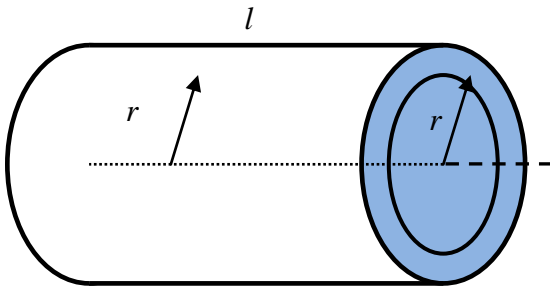


Рис. 3.2.

$$2\pi r \cdot l \cdot j_p = -2\pi r l \cdot \eta \frac{dv}{dr} \quad (6.3.3)$$

При стационарном течении эта сила компенсируется силой давления на концах выделенной трубки тока:

$$2\pi r l \cdot \eta \frac{dv}{dr} = -\pi r^2 \Delta p \quad (6.3.4)$$

Полученное уравнение

$$\frac{dv}{dr} = -\frac{r}{2\eta l} \Delta p$$

проинтегрируем, считая, что разность давлений постоянна:

$$dv = -\left(\frac{\Delta p}{2\eta l}\right) r dr$$

Получаем зависимость скорости жидкости в зависимости от радиуса трубки тока

$$v(r) = -\frac{r^2 \Delta p}{4\eta l} + const \quad (6.3.5)$$

Постоянное интегрирование определим исходя из условия, что в пристеночной области трубы (т.е. при  $r = R$ ) жидкость не движется и ее скорость движения равна нулю:

$$v(r)|_{r=R} = 0 \quad (6.3.6)$$

Таким образом, получаем зависимость скорости течения жидкости в зависимости от радиуса  $r$

$$v(r) = \frac{\Delta p}{4\eta l} (R^2 - r^2) \quad (6.3.7)$$

Максимальная скорость течения жидкости вдоль оси трубы при  $r = 0$ :

$$v_{max} = v_0 = \frac{\Delta p R^2}{4\eta l} = \frac{(p_2 - p_1) R^2}{4\eta l}$$

Откуда подставляя величину скорости вдоль оси трубы, имеем

$$v(r) = v_0 \left( 1 - \frac{r^2}{R^2} \right) \quad (6.3.8)$$

В результате мы получаем параболическую зависимость скорости жидкости от радиуса. Такая зависимость определяет *ламинарное течение* жидкости, когда слои, движущиеся со своей стационарной скоростью, не перемешиваются. Когда получаем сильное перемешивание слоев жидкости, что приводит к искажению стационарного распределения скорости, то имеем дело с *турбулентным течением* жидкости.

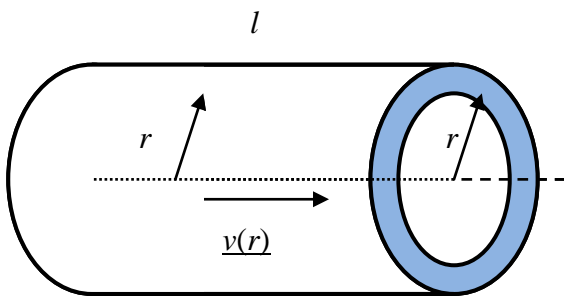


Рис. 3.3.

Каково количество жидкости протекает за 1 секунду через поперечное сечение при ламинарном течении? Элементарный объем, проходящий за единицу времени, через малое сечение  $dS = 2\pi r dr$  (кольцо см рис. 3.3) равен:

$$dV = v(r) dS = v(r) 2\pi r dr = v(r) \pi d(r^2) = \frac{\pi \Delta p}{4\eta l} (R^2 - r^2) d(r^2) \quad (6.3.9)$$

Интегрируя, получаем:

$$V(r) = \frac{\pi \Delta p}{4\eta l} \left( R^2 - \frac{r^2}{2} \right) r^2 \quad (6.3.10)$$

Полный поток жидкости через всю трубу определяется при  $r = R$

$$V = \frac{\pi \Delta p R^4}{8\eta l} \quad (6.3.11)$$

Масса, протекающей жидкости, определяется умножением на плотность жидкости  $\rho$ :

$$M = \rho V = \frac{\pi \rho \Delta p R^4}{8 \eta l} \quad (6.3.12)$$

Это формула Пуазейля.

### 6.3.2. Ламинарное и турбулентное течение. Силы сопротивления.

Физические свойства жидкости определяются ее плотностью  $\rho$  и вязкостью  $\eta$ . Когда возникает *турбулентность*? Это зависит от основных характеристик и условий протекания жидкости. Например, когда скорость возрастает, или увеличиваются размеры труб и препятствий, то возникает турбулентное течение.

Перечислим основные параметры, которые определяют условия протекания жидкости.

- 1). Плотность  $\rho$  ( $г/см^3$ )
- 2). Вязкость  $\eta$  ( $г/см \cdot с$ )
- 3). Скорость течения  $v$  ( $см/с$ )
- 4). Размер  $R$  ( $см$ )

Здесь вводим один характерный размер трубы, т.е. предполагается, что длина и поперечный размер величины одного порядка  $l \sim R$ .

Из этих величин можно составить безразмерную комбинацию – *число Рейнольдса*:

$$Re = \frac{\rho v R}{\eta} \quad (6.3.13)$$

Величина этого числа характеризует условия ламинарности и турбулентности течения жидкости. Физический смысл числа Рейнольдса – оно определяет соотношение сил вязкого трения и силы инерции жидкости. В самом деле, оценка силы вязкого трения (6.3.2) имеет вид при  $l \sim R$ :

$$F_{\text{мп}} = \eta \frac{dv}{dr} S \sim \eta \frac{v}{R} R l \sim \eta v R \quad (6.3.14)$$

Сила инерции может быть оценена следующим образом:

$$ma \sim \rho R^3 \frac{v}{t} \sim \rho R^3 \frac{v}{R/v} \approx \rho R^2 v^2 \quad (6.3.15)$$

Из (6.3.14) и (6.3.15) видно, что число Рейнольдса получается из отношения силы инерции к силе вязкого трения. Для малых значений числа Рейнольдса ( $Re \sim 0.1 \div 10$ ) при движении жидкости важна ее вязкость и тогда имеем ламинарное течение жидкости. Однако ламинарное течение сохраняется до

чисел  $Re < 1000$ . При больших числах Рейнольдса  $Re > 1000 \div 2000$  вязкость уменьшается (за исключением пограничного слоя), возникают вихри и отрыв жидкости от стенок и т.д. – турбулентное течение.

Метод размерности, с помощью которого было записано число Рейнольдса, можно применять при оценке сопротивления движущихся объектов внутри жидкости. В самом деле, размерность силы определяется в выражениях для силы трения и инерции (6.3.14) и (6.3.15). Поэтому сила сопротивления движущегося объекта внутри жидкости может быть записана:

$$F = \rho v^2 R^2 f(Re) \quad (6.3.16)$$

где  $R$  – характерный размер объекта,  $\rho$  – плотность жидкости,  $v$  – относительная скорость движения тела и жидкости,  $f(Re)$  – какая-то функция от безразмерного параметра.

При малых скоростях тела сила сопротивления пропорциональна первой степени скорости  $v$ , а функция  $f(Re)$  равна:

$$f(Re) = \frac{const}{Re} \quad (6.3.17)$$

В частности, для шара эта постоянная равна

$$const = 6\pi.$$

Отсюда получаем силу сопротивления шара радиуса  $R$  при его движении в жидкости со скоростью  $v$ :

$$F = 6\pi\eta Rv \quad (6.3.18)$$

Это – *формула Стокса*. Коэффициент пропорциональности между скоростью и силой сопротивления

$$B = \frac{1}{6\pi\eta R}$$

называется подвижностью частицы. Таким образом для шарообразной частицы подвижность по формуле Стокса обратно пропорциональна ее радиусу. В частности, это выражение для силы использовалось Р. Миликеном при определении заряда капелек масла в процессе их движения между пластинами воздушного конденсатора. Эти эксперименты позволили определить элементарный электрический заряд – заряд электрона.

---

Примечание 1. Жан Луи Мари Пуазейль, французский физик, 1799–1869;  
 Осборн Рейнольдс, английский физик, 1842–1912;  
 Джордж Габриэль Стокс, английский физик и математик, 1819–1903  
 Роберт Эндрус Милликен, американский физик, 1868–1953, Нобелевская премия 1923 г. за работы в области элементарных зарядов и фотоэлектрического эффекта

---

*Иванов Вадим Константинович*

**ФИЗИКА**  
**МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА**

Учебное пособие

Налоговая льгота – Общероссийский классификатор продукции  
ОК 005-93, т. 2; 95 3005 – учебная литература

---

Подписано к печати 08.06.2021. Формат 60x84/16. Печать цифровая.  
Усл. печ. л. 12.75. Тираж 70. Заказ 2704.

---

Отпечатано с готового оригинал-макета, предоставленного автором,  
в Издательско-полиграфическом центре Политехнического университета.  
195251, Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29.  
Тел.: (812) 552-77-17; 550-40-14