

1.4. Суперпозиция электромагнитных волн.

1.4.1. Простейший случай сложения плоских волн.

Напряженность электрического поля и индукция магнитного поля равны соответственно сумме напряженностей и магнитных индукций всех полей в данной точке независимо от их происхождения. Если эти поля принадлежат плоским электромагнитным волнам, распространяющимся в произвольных направлениях, то, вообще говоря, полученная в результате сложения совокупность электрического и магнитного полей не всегда дает плоскую электромагнитную волну. Более того, чаще при сложении плоских монохроматических волн получаем сложную электромагнитную волну.

Рассмотрим простейший случай. Сложим две плоские монохроматические волны одинаковой частоты ω , распространяющихся вдоль одного направления, векторы напряженности \vec{E}_1 и \vec{E}_2 электрических полей в которых коллинеарны $\vec{E}_1 \parallel \vec{E}_2$. Чтобы не загромождать изложения, мы будем, как правило, следить за поведением вектора \vec{E} , поскольку поведение вектора \vec{B} в плоской волне всегда может быть определено с помощью соотношений между векторами волны.

Удобнее записать уравнения волн в комплексной форме:

$$\vec{E}_1 = \vec{E}_{01} e^{-i(\omega t - \vec{k}\vec{r})} \quad \text{и} \quad \vec{E}_2 = \vec{E}_{02} e^{-i(\omega t - \vec{k}\vec{r})}. \quad (1.4.1)$$

Поскольку волны распространяются в одном направлении, то можно складывать просто модули напряженности:

$$E = E_1 + E_2 = E_{01} e^{-i(\omega t - \vec{k}\vec{r})} + E_{02} e^{-i(\omega t - \vec{k}\vec{r})} = (|E_{01}| e^{i\delta_1} + |E_{02}| e^{i\delta_2}) e^{-i(\omega t - \vec{k}\vec{r})} = E_0 e^{-i(\omega t - \vec{k}\vec{r})}, \quad (1.4.2)$$

где $|E_{01}| e^{i\delta_1} + |E_{02}| e^{i\delta_2} = |E_0| e^{i\delta} = E_0$ – комплексная амплитуда полученной волны, т.е. снова имеем плоскую волну.

Таким образом, *две плоские монохроматические волны одинаковой частоты, распространяющиеся в одном направлении, дают в результате сложения плоскую монохроматическую волну той же частоты и распространяющуюся в том же направлении.*

Однако если складываемые волны распространяются в разных направлениях или различаются по частоте, то результат их сложения может быть совершенно иным.

1.4.2. Биения.

Рассмотрим результат сложения двух плоских монохроматических волн **различной частоты** ω_1 и ω_2 , распространяющихся в одном направлении, например, вдоль оси x . Пусть $\vec{E}_1 \parallel \vec{E}_2$ и для простоты $E_{01} = E_{02} = E_0$, то есть электрические векторы параллельны и амплитуды волн одинаковы.

$$E_1 = E_0 \cos(\omega_1 t - k_1 x) \quad \text{и} \quad E_2 = E_0 \cos(\omega_2 t - k_2 x) \quad (1.4.3)$$

Как и в предыдущем случае будем складывать просто модули напряженности:

$$\begin{aligned} E = E_1 + E_2 &= E_0 [\cos(\omega_1 t - k_1 x) + \cos(\omega_2 t - k_2 x)] = \\ &= 2E_0 \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t - \frac{k_1 - k_2}{2} x\right) \cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t - \frac{k_1 + k_2}{2} x\right), \end{aligned}$$

так как $k_1 = \omega_1/c$ и $k_2 = \omega_2/c$, можем записать:

$$E = 2E_0 \cos\left[\frac{1}{2}(\omega_1 - \omega_2)\left(t - \frac{x}{c}\right)\right] \cos\left[\frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2)\left(t - \frac{x}{c}\right)\right]. \quad (1.4.4)$$

Из этого выражения видно, что в результате сложения получаем плоскую, но не монохроматическую волну.

Наглядную интерпретацию этого выражения можно дать, если складываемые волны имеют близкие друг к другу частоты ω_1 и ω_2 : $|\omega_1 - \omega_2| \ll \omega_1, \omega_2$. В этом случае первый множитель $\cos\left[\frac{1}{2}(\omega_1 - \omega_2)\left(t - \frac{x}{c}\right)\right]$ представляет собой медленно меняющуюся по сравнению со вторым множителем функцию времени или координаты. Поэтому можно считать, что мы имеем дело с распространением гармонических колебаний, частота которых определяется суммой частот $(\omega_1 + \omega_2)/2$, а амплитуда которых равна:

$$A_0 = \left| 2E_0 \cos \left[\frac{1}{2} (\omega_1 - \omega_2) \left(t - \frac{x}{c} \right) \right] \right|, \quad (1.4.5)$$

То есть амплитуда медленно меняется со временем от 0 до значения $2E_0$. Зависимость суммарных

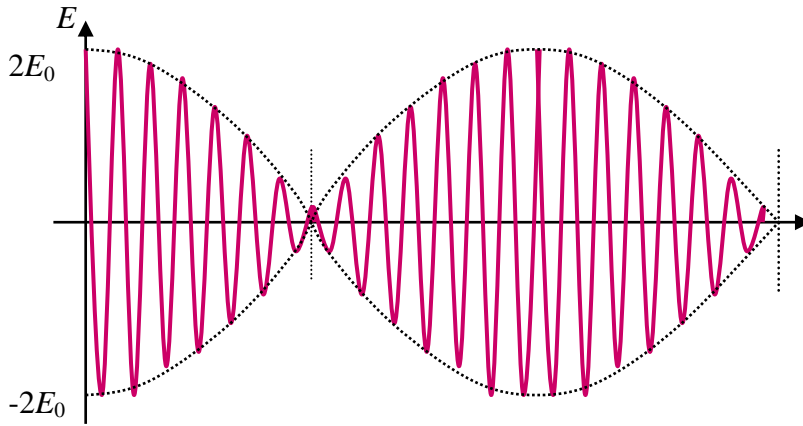


Рис. 4.1.

колебаний напряженности поля (1.4.4) от времени или от координаты качественно представлена на рис. 4.1. Такие колебания называются *биениями*. (см биения в колебаниях §4.3 Глава 4, Раздел Механика).

Частота биений равна $\Omega = |\omega_1 - \omega_2| = \Delta\omega$. Частота Ω в 2 раза больше, чем следует из (1.4.5), так как области заполнения появляются на каждый полупериод. Период биений соответственно в 2 раза меньше времени полного колебания из (1.4.5) и равен

$$T = \frac{2\pi}{\Delta\omega} \quad (1.4.6)$$

Если $E_{01} \neq E_{02}$, то амплитуда колебаний (огibaющая) изменяется в пределах от $|E_{01} - E_{02}|$ до $E_{01} + E_{02}$. Таким образом, в результате сложения двух сонаправленных плоских гармонических волн с близкими частотами мы получаем “гармоническую” волну с медленно изменяющейся амплитудой (термин “медленно” означает, что за много периодов колебаний с частотой $(\omega_1 + \omega_2)$ их амплитуда меняется мало).

1.4.3. Стоячие волны.

Важный результат получается при рассмотрении суперпозиции двух плоских монохроматических волн одинаковой частоты, распространяющихся навстречу друг другу по оси x (см рис. 4.2). Будем, по-прежнему, считать, что векторы напряженности электрического поля в этих волнах коллинеарны $\vec{E}_1 \parallel \vec{E}_2$ и колеблются с одинаковой амплитудой $E_{01} = E_{02} = E_0$.

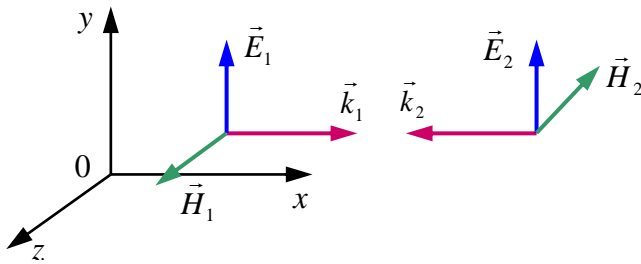


Рис. 4.2.

Итак, пусть направление распространения волн определяется осью x , а ось y выберем вдоль направления колебаний вектора \vec{E} . Начало отсчета на оси x выберем в точке, где колебания напряженностей обеих волн происходят в одинаковой фазе. Тогда электрические вектора обеих волн можем записать через компоненты в виде:

$$\begin{aligned} \vec{E}_1 &= (0, E_0 e^{-i(\omega t - kx)}, 0) \\ \vec{E}_2 &= (0, E_0 e^{-i(\omega t + kx)}, 0) \end{aligned} \quad (1.4.7)$$

Аналогично для векторов \vec{H} имеем:

$$\vec{H}_1 = (0, 0, H_0 e^{-i(\omega t - kx)}), \quad \vec{H}_2 = (0, 0, -H_0 e^{-i(\omega t + kx)}). \quad (1.4.8)$$

Отметим, что если в обеих волнах проекции векторов \vec{E} имеют одинаковые знаки, у проекций \vec{H} знак изменяется на противоположный знак. Складывая векторы $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$ и $\vec{H} = \vec{H}_1 + \vec{H}_2$, получаем результирующее электромагнитное поле:

$$\vec{E} = (0, 2E_0 e^{-i\omega t} \cos kx, 0) \quad \text{и} \quad \vec{H} = (0, 0, 2iH_0 e^{-i\omega t} \sin kx), \quad (1.4.9)$$

или в вещественном виде

$$\vec{E} = (0, 2E_0 \cos kx \cos \omega t, 0) \quad \text{и} \quad \vec{H} = (0, 0, 2H_0 \sin kx \sin \omega t). \quad (1.4.10)$$

Таким образом, в результате суперпозиции двух бегущих волн образуется электромагнитная волна, которую можно рассматривать как совокупность волн электрического и магнитного полей (рис. 4.3). Векторы напряженностей этой совокупности полей не содержат характерного для бегущей волны множителя

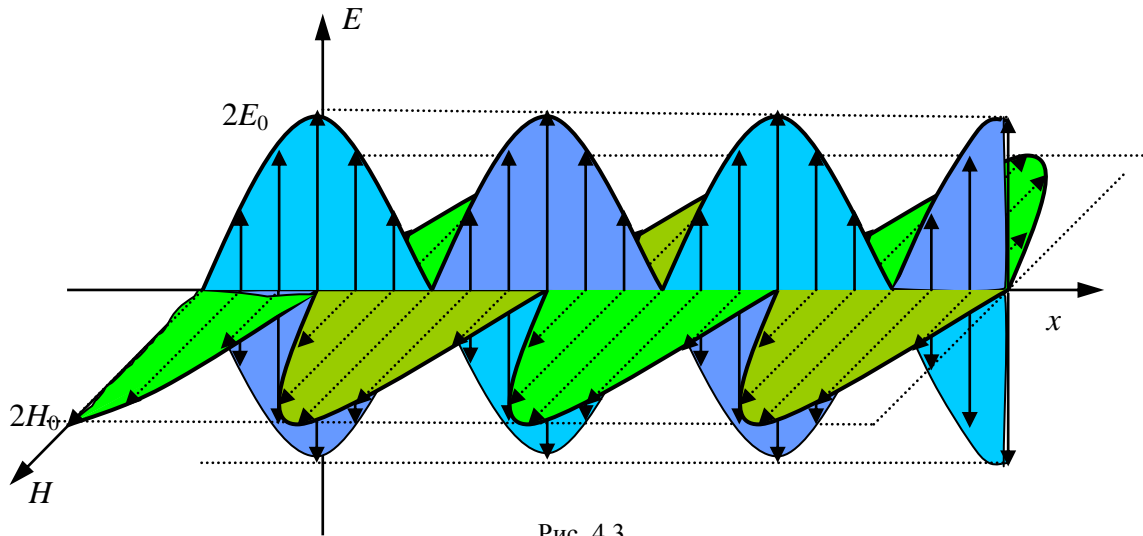


Рис. 4.3.

$\cos(t \pm x/c)$ или $\sin(t \pm x/c)$. Имеется только множитель $\cos \omega t$ (или $\sin \omega t$), описывающий колебания векторов во времени с частотой ω . Множители $2E_0 \cos kx$ и $2H_0 \sin kx$ с точностью до знака представляют собой амплитуды колебаний напряженности, соответственно, электрического и магнитного полей в точке x , изменяющиеся от точки к точке по гармоническому закону. Напряженности полей во всех точках изменяются с одной и той же частотой. Такая волна называется *стоячей*.

Амплитуда колебаний напряженности электрического поля волны изменяется от максимального значения $2E_0$ до нуля. Точки, в которых амплитуда колебаний максимальна в плоскостях:

$$(\cos kx = 1), \quad x = \frac{\pi}{k} n = \frac{\lambda}{2} n, \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \quad (1.4.11)$$

называются *пучностями* электрического поля. Точки, в которых амплитуда падает до нуля в плоскостях:

$$(\cos kx = 0), \quad x = \frac{\pi}{k} \left(n + \frac{1}{2} \right) = \frac{\lambda}{2} \left(n + \frac{1}{2} \right), \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \quad (1.4.12)$$

называются *узлами*.

Фаза колебаний вектора \vec{E} во всех точках между соседними узлами одинакова, а колебания по разные стороны узла происходят в противофазе. Пучности и узлы стоячей волны магнитного поля сдвинуты вдоль оси x на четверть длины волны по отношению к пучностям и узлам электрического поля. Колебания магнитного поля отстают по времени на четверть периода от колебаний электрического поля. Таким образом, узлы вектора \vec{E} совпадают с пучностями вектора \vec{H} и наоборот.

Это означает, например, что при достижении максимума напряженности электрического поля индукция магнитного обращается в нуль. Если же напряженность электрического поля достигает половины своего максимального значения, то и напряженность магнитного поля равна половине максимальной величины. Отличие заключается в том, что если одна из величин находится в фазе роста, то другая – в фазе уменьшения.

В рассмотренных нами ранее *бегущих электромагнитных волнах* электрическое и магнитное поля, направленные перпендикулярно друг другу, в каждой пространственной точке изменяются во времени совершенно одинаково. Так, в монохроматической волне они совершают гармонические колебания в одинаковой фазе. Стоячие волны, как мы видим, обладают существенно иными свойствами. Для таких волн характерны *пространственное разнесение и сдвиг во времени колебаний электрического и магнитного полей*.

Рассмотрим энергию в стоячей электромагнитной волне. Вектор Пойнтинга $\vec{S} = \frac{c}{4\pi} [\vec{E}, \vec{H}]$ в стоячей волне отличен от нуля за исключением узлов обоих полей. Следовательно, поток энергии отсутствует через те точки, где, либо \vec{E} , либо \vec{H} обращаются в нуль. Другими словами, поток энергии в стоячей электромагнитной волне отсутствует через узлы и пучности волны, поскольку пучности электрического поля совпадают с узлами магнитного и наоборот. Поэтому энергия стоячей волны заключена между соседними узлами и пучностями и испытывает превращения из электрической энергии в магнитную энергию и обратно. Из выражения для объемной плотности энергии

$$w = \frac{1}{8\pi} (\vec{E}\vec{D} + \vec{B}\vec{H}) \quad (1.4.13)$$

следует, что энергия стоячей волны, заключенная между соседними узлами и пучностями с течением времени сохраняет постоянное значение. Таким образом, *стоячая волна, обладая энергией, не переносит и не излучает её*. Если проинтегрировать поток электромагнитной энергии за период, получим $0: \int_0^T \vec{S} dt = 0$,

где T – период колебаний.

1.4.4. Эксперименты со стоячими волнами.

На эксперименте стоячие волны создаются в результате сложения волн падающего и отраженного света (или других электромагнитных волн). Стоячие волны образуются, в частности, в резонаторах лазеров (оптических квантовых генераторов). Для видимого света трудно наблюдать из-за малой длины волны.

Рассмотрим кратко опыт О. Винера, выполненный в 1890 г.

Стекла́нная пласти́нка, покрытая тонким фоточувствительным слоем, проводилась в соприкосновение с металлическим зеркалом, образуя малый угол α ($\sim 1^\circ$) (рис. 4.4). Падающий и отраженный свет образуют стоячую волну. Их пучности обнаруживались в фотослое после проявления фотопластины в виде поперечных полос. Важно, что опыты Винера показали, что фотохимическое действие обусловлено напряженностью электрического поля \vec{E} , а не \vec{B} . Это удалось показать, поскольку граничные условия для этих векторов вблизи металлической пластины различны (подробнее см Бутиков, стр.28-29).

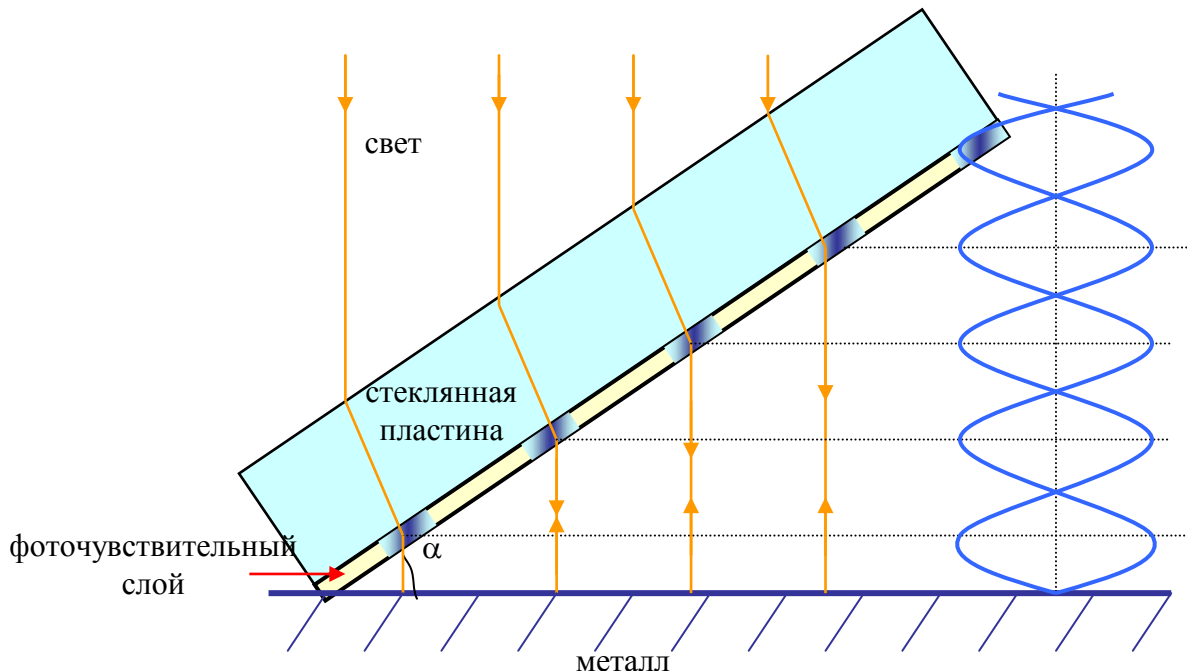


Рис. 4.4.

Метод стоячих волн использовался Г. Липпманом в 1891 году для получения цветной фотографии. Для получения высококачественных цветных фотографий Г. Липпман помещал достаточно толстую (несколько десятков микрон) фоточувствительную эмульсию на ртуть, поверхность которой использовалось как отражающее зеркало (см рис.4.5). Цветное изображение проецировалось на эту эмульсию, проходило сквозь

нее и отражалось назад зеркалом. В результате интерференции падающей и отраженной световой волны в объеме эмульсии возникали светлые и темные области, примерно параллельные плоскости

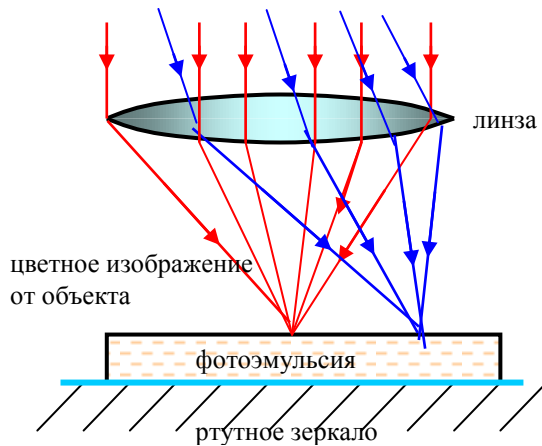


Рис. 4.5.

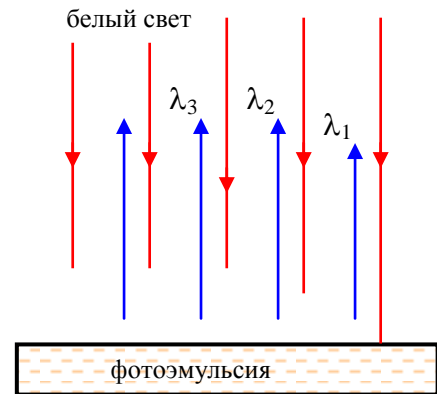


Рис. 4.6.

фоточувствительного слоя. Так как расстояние между интерференционными областями оказывалось порядка половины длины волны света, то в фоточувствительном слое помещалось десятки таких областей. После фотографического проявления и фиксации в объеме фоточувствительного слоя оказывались зарегистрированными светлые области интерференционного поля в виде слабо отражающих поверхностей. Расстояние между этими поверхностями однозначно определялось локальным цветом регистрируемого изображения. Теперь если убрать зеркало и осветить этот слой белым светом (рис. 4.6), то отражаться от каждого участка слоя будет только тот цвет, для которого расстояние между отражающими поверхностями в этом месте равно половине длины волны. Таким образом, глаз видит цветное изображение.

Примечание 1. *Отто Генрих Винер, немецкий физик, 1862–1927;*

Габриэль Липпман, французский физик, 1845–1921, Нобелевская премия 1908 г. за цветную фотографию солнечного спектра.
