

1.8. Волновые пакеты. Групповая скорость.

1.8.1. Волновые пакеты. Формула Рэлея.

Суперпозиция двух и большего числа волн с различными частотами составляет *группу волн* или *волновой пакет*. Часто под волновым пакетом понимают образование из волн, ограниченное в пространстве

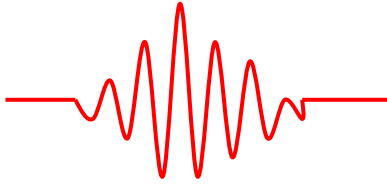


Рис. 8.1.

(рис. 8.1). К примеру, пакет волн, распространяющийся вдоль оси x , аналитически может быть записан в виде:

$$E(x, t) = \int_{\omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2}}^{\omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2}} E(\omega) \cos(\omega t - k_\omega x + \varphi_\omega) d\omega \quad (1.8.1)$$

где $\Delta\omega$ – диапазон частот складываемых волн, $E(\omega)$ – амплитуда этих волн. Часто волновой пакет записывают, вводя волновое число k в качестве переменной, а частота рассматривается как функция частоты $\omega = \omega(k)$:

$$E(x, t) = \int_{k-\Delta k}^{k+\Delta k} E_k e^{-i(\omega t - kx)} dk \quad (1.8.2)$$

Рассмотренные в §1.4 биения также можно рассматривать как пример простейшего волнового пакета. Напомним выражение (1.4.4), которое получили при сложении 2х волн (1.4.3):

$$\begin{aligned} E &= 2E_0 \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t - \frac{k_1 - k_2}{2} x\right) \cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t - \frac{k_1 + k_2}{2} x\right) = \\ &= 2E_0 \cos\left[\frac{1}{2}(\omega_1 - \omega_2)\left(t - \frac{x}{c}\right)\right] \cos\left[\frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2)\left(t - \frac{x}{c}\right)\right] \end{aligned} \quad (1.8.3)$$

В §1.4 мы считали, что скорости распространения этих 2-х волн одинаковы, что и справедливо в вакууме $c = \omega_1/k_1 = \omega_2/k_2$. Это фазовые скорости волн. Однако в среде скорость электромагнитных волн меньше скорости света $v = c/\sqrt{\epsilon\mu}$ и в принципе зависит от частоты, поскольку реакция среды, т.е. ϵ и μ , может зависеть от частоты электромагнитного поля. Зависимость фазовой скорости волны от частоты называется *дисперсией*. Поэтому в биениях фазовые скорости 2-х волн могут быть разными:

$$\begin{aligned} v_1 &= \frac{\omega_1}{k_1}, \\ v_2 &= \frac{\omega_2}{k_2}. \end{aligned} \quad (1.8.4)$$

Если дисперсии нет, то огибающая амплитуд движется вместе с волнами, т.е. со скоростью света. Если дисперсия есть, то огибающая движется с иной скоростью, чем скорости движения волн.

Определение: *скорость движения максимума огибающей амплитуды группы волн или волнового пакета называется групповой скоростью.*

Простейший случай нахождения групповой скорости – для биений – определяется условием постоянства фазы огибающей амплитуды (см из (1.8.3)):

$$\frac{1}{2}(\omega_1 - \omega_2)t - \frac{1}{2}(k_1 - k_2)x = const \quad (1.8.5)$$

Дифференцируя, находим групповую скорость:

$$v_{gp} = \frac{dx}{dt} = \frac{\omega_1 - \omega_2}{k_1 - k_2} \quad (1.8.6)$$

Если дисперсии нет, то $k_1 - k_2 = (\omega_1 - \omega_2)/c$ и тогда $v_{gp} = c$.

Итак, при наличии дисперсии групповая скорость отличается от фазовой скорости. В результате огибающая амплитуд и слагаемые волны движутся с различными скоростями, что приводит к изменению формы огибающей в процессе распространения волны, т.е. при наличии дисперсии волновой пакет распространяется с изменением формы.

Если частоты слагаемых волн ω_1 и ω_2 близки друг к другу, то групповая скорость равна:

$$v_{gp} = \frac{d\omega}{dk}, \quad (1.8.7)$$

где $\omega = \omega(k)$. Эта формула справедлива не только для 2-х волн с бесконечно близкими частотами, но и для произвольного волнового пакета, образованного суперпозицией бесконечного числа волн с близкими частотами, поскольку является дифференциальной.

Найдем связь между групповой и фазовой скоростями. Воспользуемся определениями (1.8.4) и (1.8.7) и подставим частоту из фазовой скорости $\omega = kv$ в групповую скорость:

$$v_{gp} = \frac{d(kv)}{dk} = v + k \frac{dv}{dk} \quad (1.8.8)$$

Подставляя $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ и $dk = -\frac{2\pi}{\lambda^2} d\lambda$, получаем окончательно связь групповой скорости и фазовой:

$$v_{gp} = v - \lambda \frac{dv}{d\lambda} \quad (1.8.9)$$

Это [формула Рэлея](#). В зависимости от знака $\frac{dv}{d\lambda}$ групповая скорость может быть меньше, так и больше

фазовой (но всегда меньше скорости света в вакууме). Когда дисперсии нет: $\frac{dv}{d\lambda} = 0$ и $v_{gp} = v$.

Максимум интенсивности (энергии) приходится на максимум огибающей в волновом пакете волн. Поэтому в тех случаях, когда понятие групповой скорости имеет смысл, скорость переноса энергии (и информации) волной равна групповой скорости.

Примечание 1.

- 1) Понятие групповой скорости неприменимо, когда поглощение среды очень велико (область аномальной дисперсии).
- 2) При распространении пакета волн в среде с дисперсией в первом приближении можно считать, что максимум и огибающая движутся с одной скоростью – групповой. Однако, если в пакете волн присутствуют разные частоты, тогда групповые скорости для соседних частот разные. Это приводит к изменению формы огибающей волнового пакета (в среде с дисперсией пакет может меняться, расплываться и т.д.).

Примечание 2. Джон Уильям Рэлей, английский физик, 1842–1919, Нобелевская премия 1904 г. за открытие аргона

1.8.2. Пример спектрального разложения.

Рассмотрим один из важных примеров спектрального разложения: [цуг синусоидальных волн](#) или что, то же самое, “оборванная” синусоида (см рис. 8.2). Цуг волн – это модельное представление процесса излучения источника (атом в возбужденном состоянии) электромагнитных волн, который колеблется в течение некоторого времени, излучая энергию в создание переменного электромагнитного поля.

Для простоты пусть имеем синусоидальную волну

$$E(t) = E_0 \sin(\omega_0 t),$$

проходящую через фиксированную данную точку пространства. Пусть также синусоидальные колебания длятся в течение времени τ , при этом T_0 и $\omega_0 = 2\pi/T_0$ – период колебаний и частота колебаний во времени, соответственно (рис. 8.2).

Итак, записываем спектральное разложение из (1.7.6) и (1.7.8):

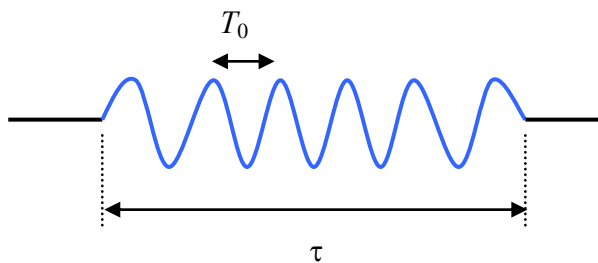


Рис. 8.2.

$$E(t) = 2 \int_0^{\infty} E(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (1.8.10)$$

с амплитудами, определяющими спектр по формуле (1.7.7):

$$E(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} E(t) e^{-i\omega t} dt \quad (1.8.11)$$

Очевидно, что мы имеем дело со сплошным спектром частот. В нашем случае (1.8.11) запишется в пределах

$$E(\omega) = \frac{E_0}{2\pi} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} \text{Sin} \omega_0 t e^{-i\omega t} dt = \frac{E_0}{4\pi i} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} (e^{i\omega_0 t} - e^{-i\omega_0 t}) e^{-i\omega t} dt = \frac{E_0}{2\pi i} \left(\frac{\text{Sin} \frac{1}{2}(\omega_0 - \omega)\tau}{\omega_0 - \omega} - \frac{\text{Sin} \frac{1}{2}(\omega_0 + \omega)\tau}{\omega_0 + \omega} \right)$$

Подставляя в (1.8.10) и умножая числитель и знаменатель на τ , получаем для реальной части сигнала:

$$E(t) = \frac{\tau E_0}{2\pi} \int_0^{\infty} \left(\frac{\text{Sin} \frac{1}{2}(\omega_0 - \omega)\tau}{\frac{1}{2}(\omega_0 - \omega)\tau} - \frac{\text{Sin} \frac{1}{2}(\omega_0 + \omega)\tau}{\frac{1}{2}(\omega_0 + \omega)\tau} \right) \text{Sin} \omega t d\omega \quad (1.8.12)$$

При условии $|\omega_0 - \omega| \ll |\omega_0 + \omega|$ (или иначе в области частот $\omega \sim \omega_0$) вторым слагаемым в (1.8.12) можно пренебречь. Тогда спектр в аналитической форме приобретает следующий вид:

$$E(\omega) \sim \frac{\text{Sin} \frac{1}{2}(\omega_0 - \omega)\tau}{\frac{1}{2}(\omega_0 - \omega)\tau} \equiv \frac{\text{Sin} \alpha}{\alpha}. \quad (1.8.13)$$

Спектр $E(\omega)$ графически изображен на рис. 8.3. В точках

$$\frac{1}{2}(\omega_0 - \omega)\tau = \pi n$$

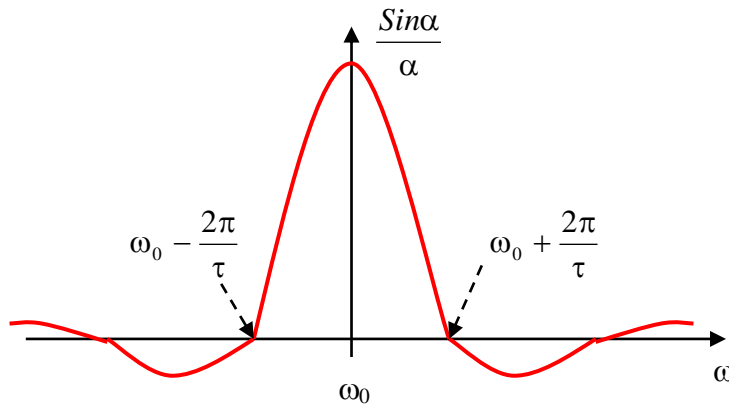


Рис. 8.3.

происходит обращение в нуль кривой зависимости $E = E(\omega)$. Основная часть спектра находится в области около ω_0 , причем разброс частот спектра подчиняется условию (грубо говоря, ширина максимума на его полувысоте):

$$\Delta\omega = |\omega_0 - \omega| \geq \frac{2\pi}{\tau} \quad (1.8.14)$$

Таким образом, получаем, что основное расположение спектрального диапазона определяется условием:

$$\Delta\omega \cdot \tau \geq 2\pi$$

или

$$\Delta\nu \cdot \tau \geq 1 \quad (1.8.15)$$

Это важное соотношение между

шириной спектра $\Delta\omega$ и длительностью цуга волн τ . Оно имеет самый общий характер (прообраз соотношения неопределенностей в квантовой физике). Чем больше длительность волны τ , т.е. синусоида ближе к монохроматической зависимости, тем уже спектр, сосредоточенный около основной частоты ω_0 . Наоборот, чем меньше длительность цуга, тем шире спектральный состав волнового пакета.

Аналогичная формула имеет место и для пространственного распределения волнового поля, когда рассматриваем его в определенный зафиксированный момент времени t . В этом случае снова можно рассматривать оборванную синусоиду, но в пространстве координаты x (рис. 8.4)

$$E(x, t) = E_0 \sin(\omega_0 t - k_0 x).$$

Тогда можно разлагать волновое поле $E(x, t)$ по векторам k – волновым числам, т.е. меняем частоту ω на волновое число k ($\omega = kv$), а время t – на координату x . Также легко найти, что длина цуга Δx и интервал волновых чисел Δk связаны соотношением неопределенностей:

$$\Delta k \cdot \Delta x \geq 2\pi \quad (1.8.16)$$

Эти соотношения (1.8.15) и (1.8.16) выражают *принцип неопределенности*, который был также получен В. Гейзенбергом в квантовой механике.

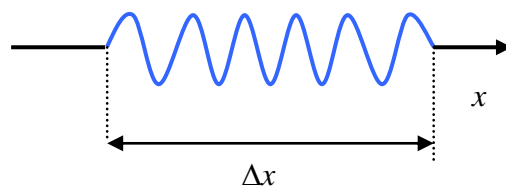


Рис. 8.4.

Примечание 3. Вернер Карл Гейзенберг (Werner Karl Heisenberg), немецкий физик-теоретик, 1901 - 1976, один из создателей квантовой механики, лауреат Нобелевской премии по физике (1932) «за создание квантовой механики, приложения которой, в числе прочего, привели к открытию аллотропных форм водорода».
