1.9. Преобразования векторов электромагнитного поля.

1.9.1. Преобразования компонент электромагнитного поля.

Полученные и изученные нами законы электродинамики применимы для описания явлений, которые происходят в инерциальных системах отсчета (ИСО). Известно, что все инерциальные системы отсчета равноправны, поэтому законы всех физических, и том числе электромагнитных, явлений не изменяются при переходе от одной ИСО к другой. Однако легко заметить, что конкретные физические величины, характеризующие электромагнитное поле ($\vec{E}, \vec{D}, \vec{B}, \vec{H}$, плотности зарядов ρ и токов $\vec{j}$ и т.д.) будут изменяться при изменении системы отсчета.

Поэтому теория электромагнитных явлений должна,

во-первых, установить правила изменения электромагнитных величин при переходе из одной системы отсчета в другую;

во-вторых, показать, что установленные правила пересчета физических величин обеспечивают инвариантность законов электродинамики при изменении системы отсчета;

в-третьих, отыскать инварианты электромагнитного поля.

Пусть имеются две ИСО: система отсчета К и движущаяся относительно нее со скоростью $\vec{v}$ система отсчета К′. При этом оси x и x' координатных систем совмещены и вектор $\vec{v}$ направлен вдоль оси x. Предположим, что в некоторой пространственно-временной точке К системы известны значения векторов $\vec{E}$ и $\vec{B}$. Определим, какими будут значения полей $\vec{E}'$ и $\vec{B}'$ в той же самой пространственно-временной точке, но в К′ системе отсчета. Напомним, что одной и той же пространственно-временной точкой называют такую точку, координаты и время которой в обеих системах отсчета связаны между собой преобразованиями Лоренца.

Электромагнитные потенциалы, скалярный $\varphi(\vec{r},t)$ и векторный $\vec{A}(\vec{r},t)$, образуют 4-х вектор, что следует из инвариантности уравнений для потенциалов относительно преобразований Лоренца. Итак, рассмотрим 4-х вектор $(\varphi, \vec{A})$ и его преобразования при переходе из системы К в систему К′:

$$\varphi = \frac{\varphi' + \frac{v}{c}A'_x}{\sqrt{1-\beta^2}} = \gamma\left(\varphi' + \frac{v}{c}A'_x\right), \qquad A_y = A'_y,$$
$$A_x = \frac{A'_x + \frac{v}{c}\varphi'}{\sqrt{1-\beta^2}} = \gamma\left(A'_x + \frac{v}{c}\varphi'\right), \quad A_z = A'_z \qquad (1.9.1)$$

где $\beta = v/c$. При переходе из системы К′ в К-систему в преобразованиях (1.9.1) меняется направление скорости ($v \to -v$). Вектора электромагнитного поля определяются через потенциалы, как и раньше:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}; \qquad \vec{B} = rot\vec{A}. \qquad (1.9.2)$$

Поскольку в (1.9.2) входят частные производные, то, вспоминая преобразования Лоренца для координат и времени:

$$x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1-\beta^2}} = \gamma(x' + vt'), \qquad y = y',$$
$$t = \frac{t' + x'v/c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} = \gamma\left(t' + \frac{x'v}{c^2}\right), \quad z = z' \qquad (1.9.3)$$

получим заготовку для частных производных:

$$\frac{\partial x}{\partial x'} = \gamma, \quad \frac{\partial x}{\partial t'} = v\gamma, \quad \frac{\partial t}{\partial t'} = \gamma, \quad \frac{\partial t}{\partial x'} = \frac{v}{c^2}\gamma \qquad (1.9.4)$$

Этими соотношениями воспользуемся при рассмотрении компонент векторов $\vec{E}$ и $\vec{B}$ при переходе из одной ИСО в другую.

а). Рассмотрим x-ую компоненту магнитного поля $\vec{B}$, пользуясь (1.9.1) и (1.9.3):

$$B'_x = \frac{\partial A'_z}{\partial y'} - \frac{\partial A'_y}{\partial z'} = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} = B_x$$

Таким образом, x -ая компонента магнитного поля при переходе из системы К в систему К′ не меняется:

$$B'_x = B_x \tag{1.9.5}$$

б). Рассмотрим x -ую компоненту электрического поля $\vec{E}$ (пользуясь (1.9.4)):

$$E'_x = -\frac{\partial \varphi'}{\partial x'} - \frac{1}{c}\frac{\partial A'_x}{\partial t'} =$$

$$= -\gamma\left\{\frac{\partial x}{\partial x'}\frac{\partial}{\partial x}\left(\varphi - \frac{v}{c}A_x\right) + \frac{\partial t}{\partial x'}\frac{\partial}{\partial t}\left(\varphi - \frac{v}{c}A_x\right) + \frac{1}{c}\frac{\partial x}{\partial t'}\frac{\partial}{\partial x}\left(A_x - \frac{v}{c}\varphi\right) + \frac{1}{c}\frac{\partial t}{\partial t'}\frac{\partial}{\partial t}\left(A_x - \frac{v}{c}\varphi\right)\right\} =$$

$$= -\gamma^2\left\{\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \cancel{\frac{v}{c}\frac{\partial A_x}{\partial x}} + \cancel{\frac{v}{c^2}\frac{\partial \varphi}{\partial t}} - \frac{v^2}{c^3}\frac{\partial A_x}{\partial t} + \cancel{\frac{v}{c}\frac{\partial A_x}{\partial x}} - \frac{v^2}{c^2}\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{1}{c}\frac{\partial A_x}{\partial t} - \cancel{\frac{v}{c^2}\frac{\partial \varphi}{\partial t}}\right\} =$$

$$= -\gamma^2\left\{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{1}{c}\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)\frac{\partial A_x}{\partial t}\right\} = -\gamma^2\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{1}{c}\frac{\partial A_x}{\partial t}\right) = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{1}{c}\frac{\partial A_x}{\partial t} = E_x\,,$$

Таким образом, и x -ая компонента электрического поля при переходе из системы К в систему К′ также не меняется:

$$E'_x = E_x\,. \tag{1.9.6}$$

в). $y -$ ая компонента вектора $\vec{B}$:

$$B'_y = \frac{\partial A'_x}{\partial z'} - \frac{\partial A'_z}{\partial x'}\,;$$

$$A'_x = \gamma\left(A_x - \frac{v}{c}\varphi\right); \quad A'_z = A_z; \quad \partial z' = \partial z\,.$$

$$B'_y = \frac{\partial}{\partial z}\left\{\gamma\left(A_x - \frac{v}{c}\varphi\right)\right\} - \left\{\frac{\partial x}{\partial x'}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial t}{\partial x'}\frac{\partial}{\partial t}\right\}A_z = \gamma\left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{v}{c}\frac{\partial \varphi}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} - \frac{v}{c^2}\frac{\partial A_z}{\partial t}\right) =$$

$$= \gamma\left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right) + \gamma\frac{v}{c}\left(-\frac{\partial \varphi}{\partial z} - \frac{1}{c}\frac{\partial A_z}{\partial t}\right) = \gamma\left(B_y + \frac{v}{c}E_z\right);$$

$$B'_y = \frac{B_y + \frac{v}{c}E_z}{\sqrt{1-\beta^2}}\,. \tag{1.9.7}$$

г). $y -$ ая компонента вектора $\vec{E}$:

$$E'_y = -\frac{\partial \varphi'}{\partial y'} - \frac{1}{c}\frac{\partial A'_y}{\partial t'}\,; \quad \varphi' = \gamma\left(\varphi - \frac{v}{c}A_x\right); \quad A'_y = A_y\,; \quad \partial y' = \partial y\,.$$

$$E'_y = -\frac{\partial}{\partial y}\left\{\gamma\left(\varphi - \frac{v}{c}A_x\right)\right\} - \frac{1}{c}\left(\frac{\partial t}{\partial t'}\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial x}{\partial t'}\frac{\partial}{\partial x}\right)A_y = \gamma\left(-\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{v}{c}\frac{\partial A_x}{\partial y} - \frac{1}{c}\frac{\partial A_y}{\partial t} - \frac{v}{c}\frac{\partial A_y}{\partial x}\right) =$$

$$= \gamma\left(-\frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{1}{c}\frac{\partial A_y}{\partial t}\right) - \gamma\frac{v}{c}\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_z}{\partial y}\right) = \gamma\left(E_y - \frac{v}{c}B_z\right);$$

$$E'_y = \frac{E_y - \frac{v}{c}B_z}{\sqrt{1-\beta^2}}\,. \tag{1.9.8}$$

д). $z -$ компоненты векторов $\vec{E}$ и $\vec{B}$ получаем аналогично:

$$E'_z = \frac{E_z + \frac{v}{c} B_y}{\sqrt{1-\beta^2}}; \qquad B'_z = \frac{B_z - \frac{v}{c} E_y}{\sqrt{1-\beta^2}}. \qquad (1.9.9)$$

Формулы преобразования векторов электромагнитного поля можно также представить через преобразования параллельных и перпендикулярных составляющих поля (относительно движения) в виде:

$$E'_{||} = E_{||}; \qquad B'_{||} = B_{||};$$

$$\vec{E}'_{\perp} = \frac{\vec{E}_{\perp} + \frac{1}{c}\left[\vec{v},\vec{B}\right]}{\sqrt{1-(v/c)^2}}; \qquad \vec{B}'_{\perp} = \frac{\vec{B}_{\perp} - \frac{1}{c}\left[\vec{v},\vec{E}\right]}{\sqrt{1-(v/c)^2}}. \qquad (1.9.10)$$

Из уравнений, определяющих законы преобразования векторов электромагнитного поля, следует, что каждый из векторов $\vec{E}'$ и $\vec{B}'$ выражается через комбинацию векторов $\vec{E}$ и $\vec{B}$. Это свидетельствует о *единой природе электрического и магнитного полей*. Каждая из компонент электромагнитного поля не имеет абсолютного смысла, поэтому разговор об электрическом и магнитном полях может идти лишь в том случае, когда для них указана система отсчета. *Раздельное рассмотрение этих полей возможно тогда и только тогда, когда оба поля являются статическими*.

1.9.2. Электрическое поле движущегося точечного заряда.

Рассмотрим задачу о нахождении поля равномерно движущегося точечного заряда, используя для ее решения, полученные в предыдущем пункте формулы.

Свяжем К′ систему отсчета с точечным зарядом q, поместив его в начало координат. В этой системе отсчета напряженность электрического поля $\vec{E}'$ заряда q описывается законом Кулона, а магнитное поле отсутствует:

$$\vec{E}' = \frac{q\vec{r}\,'}{r'^3},$$

$$\vec{B}' = 0\,, \qquad (1.9.11)$$

где $r'^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2$ – расстояние до точки наблюдения.

В К системе отсчета заряд q движется со скоростью v в положительном направлении оси x. Найдем поле заряда q в системе отсчета К, преобразуя чисто кулоновское сферическое поле $\vec{E}'$ по полученным выше правилам. Пусть соответствующие оси координатных систем К и К′ в момент $t' = t = 0$ совпадают. Тогда, согласно формулам преобразования (1.9.6) и (1.9.3), имеем:

$$E_x = E'_x = \frac{qx'}{r'^3} = \frac{q\gamma(x - vt)}{\left[\gamma^2 (x - vt)^2 + y^2 + z^2\right]^{3/2}}. \qquad (1.9.12)$$

С другой стороны, $vt = x_q$ – координата заряда q в К системе, поэтому

$$E_x = q\frac{\gamma\left(x - x_q\right)}{\left[\gamma^2\left(x - x_q\right)^2 + y^2 + z^2\right]^{3/2}}. \qquad (1.9.13)$$

Другие компоненты поля в К системе (при $\vec{B}' = 0$ в (1.9.10)) равны, соответственно:

$$E_y = \gamma E'_y = \frac{q\gamma y}{\left[\gamma^2\left(x - x_q\right)^2 + y^2 + z^2\right]^{3/2}},$$

$$E_z = \gamma E'_z = \frac{q\gamma z}{\left[\gamma^2\left(x - x_q\right)^2 + y^2 + z^2\right]^{3/2}}. \qquad (1.9.14)$$

Таким образом, в К системе отсчета поле заряда q, движущегося равномерно и прямолинейно, не меняет свою конфигурацию, а меняется лишь положение этой конфигурации относительно неподвижной К системы, т.е. поле неизменной конфигурации движется вместе с создающим его зарядом.

Определим конфигурацию поля для момента времени, когда заряд находится в начале координат К системы отсчета, т.е. при $x_q = 0$:

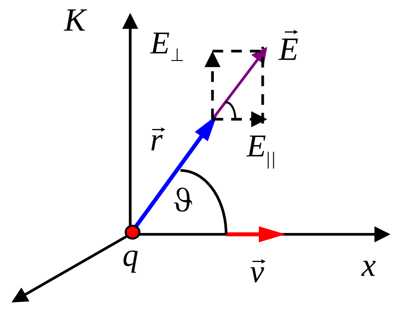

Рис. 9.1.

$$\vec{E} = q\frac{\gamma\vec{r}}{\left[\gamma^2 x^2 + y^2 + z^2\right]^{3/2}}, \tag{1.9.15}$$

где $\vec{r}$ – радиус- вектор, направленный из местонахождения заряда q, в точку, в которой определяется поле $\vec{E}$. Напряженность поля $\vec{E}$ направлена вдоль вектора $\vec{r}$, и ее значение зависит от направления вектора $\vec{r}$. Пусть ϑ – угол между направлениями скорости $\vec{v}$ движения заряда q в К системе и радиус-вектора $\vec{r}$. Тогда

$$x = r\cos\vartheta; \quad y^2 + z^2 = r^2\sin^2\vartheta.$$

Отсюда получаем

$$\gamma^2x^2 + y^2 + z^2 = \gamma^2 r^2\left(\cos^2\vartheta + \frac{1}{\gamma^2}\sin^2\vartheta\right) =$$

$$= \gamma^2 r^2\left[1 - \left(1 - 1 + \beta^2\right)\sin^2\vartheta\right] = \gamma^2 r^2\left(1 - \beta^2\sin^2\vartheta\right)$$

Поэтому выражение для электрического поля свободно движущегося заряда принимает вид

$$\vec{E} = q\frac{\vec{r}}{r^3}\frac{1-\beta^2}{\left(1-\beta^2\sin^2\vartheta\right)^{3/2}}. \tag{1.9.16}$$

Отличие электрического поля свободно движущегося заряда q от сферически симметричного поля такого же неподвижного заряда сводится к появлению для движущегося заряда зависимости поля $\vec{E}$ от направления, задаваемого радиус-вектором $\vec{r}$.

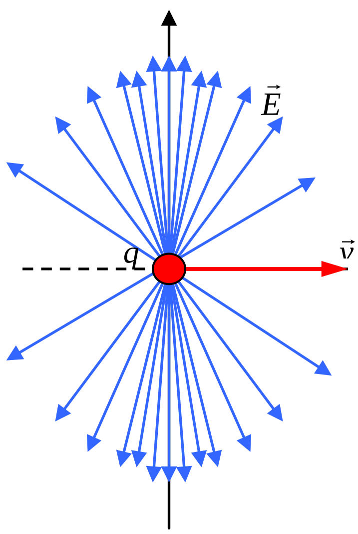

Рис. 9.2.

Поле в направлении движения заряда $(\vartheta = 0; \pi)$ равно:

$$E_{||} = \frac{q}{r^2}\left(1-\beta^2\right). \tag{1.9.17}$$

В направлении, перпендикулярном вектору скорости $\vec{v}$ $(\vartheta = \pm\pi/2)$:

$$E_\perp = \frac{q}{r^2}\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}. \tag{1.9.18}$$

Очевидно, что зависимость напряженности поля $\vec{E}$ от направления тем сильнее, чем выше скорость движения заряда. При релятивистских скоростях $(\beta \approx 1)$ поле концентрируется вблизи плоскости, проведенной через заряд q и перпендикулярной скорости его движения $\vec{v}$ (рис. 9.2).

В К′ системе отсчета индукция магнитного поля $\vec{B}' = 0$. В системе отсчета К магнитное поле определяется с помощью полученных выше формул преобразования. В нерелятивистском случае $(\gamma \approx 1)$:

$$\vec{B} = \frac{1}{c}\left[\vec{v}, \vec{E}\right]. \tag{1.9.19}$$

При скоростях порядка скорости света поле вектора $\vec{B}$ определяется выражением:

$$\vec{B} = \frac{1}{c\sqrt{1-\beta^2}}\left[\vec{v}, \vec{E}\right]. \tag{1.9.20}$$

Видно, что линии вектора магнитной индукции образуют концентрические окружности с центром на оси x, вдоль которой движется заряд.

1.9.3. Инварианты электромагнитного поля.

Итак, при переходе из одной инерциальной системы отсчета в другую векторы электромагнитного поля $\vec{E}$ и $\vec{B}$ изменяются. Как мы видели выше, мыслима такая ситуация, когда в некоторой системе отсчета отличны от нуля обе компоненты электромагнитного поля, а в другой имеется только электрическое поле.

В то же время плоская электромагнитная волна характеризуется вполне определенными свойствами: векторы $\vec{E}$ и $\vec{B}$ взаимно перпендикулярны, а их модули связаны соотношением $\sqrt{\varepsilon}E = \sqrt{\mu}H$ (в вакууме $E = H$). Можно задать вопрос – сохраняются ли свойства векторов электромагнитного поля при переходе из одной инерциальной системы отсчета в другую? Это принципиальный вопрос. Если сохраняются, то понятие плоской электромагнитной волны является релятивистки инвариантным, отражающим внутренние свойства электромагнитного поля волны. В противном же случае, это понятие не определяет объективно существующего физического объекта, а зависит от случайного выбора системы отсчета.

Полученные нами правила преобразований позволяют убедиться, что векторы напряженности электромагнитного поля $\vec{E}$ и $\vec{B}$, удовлетворяющие условиям, вытекающим из свойств плоской волны, в одной системе отсчета, удовлетворяют этим условиям и в другой системе отсчета. Таким образом, *плоская электромагнитная волна является релятивистки инвариантным понятием, определяющим объективно существующий физический объект.*

Мы не будем останавливаться на проверке этого частного утверждения, а проанализируем общий вопрос об инвариантах электромагнитного поля, ответ на который, наряду с обоснованием инвариантности плоской волны, позволит получить многие другие важные выводы. Другими словами, возникает вопрос об инвариантных, т.е. не зависящих от выбора системы отсчета, количественных характеристиках электромагнитного поля. Безусловно, первым в числе таких характеристик следует отметить электрический заряд q, величина которого не зависит от выбора системы отсчета.

Далее под инвариантами преобразований электромагнитного поля мы будем понимать величины, не изменяющие своих значений при переходах между инерциальными системами отсчета, составленные из векторов поля. Вообще говоря, есть способы нахождения инвариантов преобразований. Однако, мы поступим иначе и прямым вычислением покажем, что *инвариантами электромагнитного поля* являются приведенные ниже комбинации векторов поля.

$$I_1 = B^2 - E^2; \qquad I_1' = H^2 - D^2. \tag{1.9.21}$$

$$I_2 = \vec{B}\cdot\vec{E}; \qquad I_2' = \vec{H}\cdot\vec{D}. \tag{1.9.22}$$

$$I_3 = \vec{H}\cdot\vec{B} - \vec{D}\cdot\vec{E}. \tag{1.9.23}$$

Убедимся в этом, используя правила преобразования полей. Например, рассмотрим (1.9.21), при этом воспользуемся преобразованиями (1.9.7) - (1.9.9):

$$B^2 - E^2 = \left(B_x^2 + B_y^2 + B_z^2\right) - \left(E_x^2 + E_y^2 + E_z^2\right) = B_x'^2 + \frac{\left(B_y' - \frac{v}{c}E_z'\right)^2 + \left(B_z' + \frac{v}{c}E_y'\right)^2}{1 - v^2/c^2} -$$

$$-E_x'^2 - \frac{\left(E_y' + \frac{v}{c}B_z'\right)^2 + \left(E_z' - \frac{v}{c}B_y'\right)^2}{1 - v^2/c^2} = B_x'^2 + B_y'^2 + B_z'^2 + \frac{-2\frac{v}{c}B_y'E_z' + 2\frac{v}{c}B_z'E_y'}{1 - v^2/c^2} -$$

$$-E_x'^2 - E_y'^2 - E_z'^2 - \frac{2\frac{v}{c}E_y'B_z' + 2\frac{v}{c}E_z'B_y'}{1 - v^2/c^2} = B'^2 - E'^2 = inv.$$

Далее (1.9.22):

$$\vec{B}\cdot\vec{E} = B_xE_x + B_yE_y + B_zE_z = B_x'E_x' + \frac{\left(B_y' - \frac{v}{c}E_z'\right)\left(E_y' + \frac{v}{c}B_z'\right)}{1 - v^2/c^2} +$$

$$+\frac{\left(B_z' + \frac{v}{c}E_y'\right)\left(E_z' - \frac{v}{c}B_y'\right)}{1 - v^2/c^2} = B_x'\cdot E_x' + \frac{B_y'E_y' - \frac{v^2}{c^2}B_y'E_y'}{1 - v^2/c^2} + \frac{B_z'E_z' - \frac{v^2}{c^2}B_z'E_z'}{1 - v^2/c^2} +$$

$$+\frac{\frac{v}{c}\left(B'_yB'_z-E'_yE'_z\right)}{1-v^2/c^2}+\frac{-\frac{v}{c}\left(B'_yB'_z-E'_yE'_z\right)}{1-v^2/c^2}=\vec{B}'\cdot\vec{E}'=inv.$$

Аналогично устанавливается инвариантность комбинации векторов поля (1.9.23).

Анализ инвариантов электромагнитного поля позволяет сделать следующие выводы.

1) Если в некоторой инерциальной системе отсчета (ИСО) $B^2 > E^2$ и $\vec{E}\perp\vec{B}$, то можно выбрать такую систему отсчета, где электрическое поле отсутствует, а магнитное поле отлично от нуля. Если же условие $\vec{E}\perp\vec{B}$ не выполняется, то такой ИСО не существует.
2) Если в некоторой ИСО $B^2 < E^2$ и $\vec{E}\perp\vec{B}$, то можно выбрать такую систему отсчета, где магнитное поле отсутствует, а электрическое поле отлично от нуля. Если же условие $\vec{E}\perp\vec{B}$ не выполняется, то такой ИСО не существует.
3) Если в какой-либо ИСО имеется только электрическое (магнитное) поле, то при переходе в другую ИСО наблюдаются, вообще говоря, как электрическое, так и магнитное поля, которые перпендикулярны друг другу.
4) Плоская волна, для которой $E = B$ и $\vec{E}\perp\vec{B}$ ($I_1 = 0$ и $I_2 = 0$), остается плоской волной во всех ИСО.

Из последнего вывода – об инвариантности плоской волны – следует, что если поле в некоторой пространственно-временной точке равно нулю, то это утверждение объективно и не зависит от того, в какой ИСО рассматривается эта точка. Иначе говоря, векторы электромагнитного поля в данной пространственно-временной точке во всех системах отсчета равны нулю, т.е. *фаза волны во всех системах отсчета одинакова, что доказывает ее инвариантность*.

Инвариантность фазы следует из формул преобразования векторов поля. Фаза волны может быть представлена в виде

$$\omega t-\vec{k}\vec{r}=\underbrace{\frac{\omega}{c}}_{k_0}\cdot\underbrace{ct}_{x_0}-k_x x-k_y y-k_z z=inv. \tag{1.9.24}$$

Правая часть выражения имеет вид скалярного произведения. Совокупность величин, стоящих в правой части, может быть представлена в виде 4^{х}-вектора: $\left(\omega/c,\vec{k}\right)$, или $\omega^2/c^2-k^2=inv=0$. Тогда при переходе из одной системы отсчета в другую величины, образующие 4^{х}-вектор, будут изменяться в соответствии с преобразованиями Лоренца. Если система отсчета К′ движется со скоростью v в направлении оси x неподвижной К системы, то имеем

$$\frac{\omega'}{c}=\frac{\frac{\omega}{c}-\frac{v}{c}k_x}{\sqrt{1-v^2/c^2}};$$

$$k'_x=\frac{k_x-\frac{v}{c}\frac{\omega}{c}}{\sqrt{1-v^2/c^2}};$$

$$k'_y=k_y;\qquad k'_z=k_z. \tag{1.9.24}$$

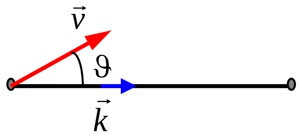

Рис. 9.3.

Пусть $\vartheta-$угол между векторами $\vec{v}$ и $\vec{k}$, т.е. между направлением движения системы-источника и направлением наблюдения (см рис. 9.3 и 9.4), тогда имеем:

$$\omega'=\frac{\omega-vk\cos\vartheta}{\sqrt{1-v^2/c^2}}, \tag{1.9.25}$$

где $k=\omega/c$. Таким образом получаем, что, если $\omega-$ частота электромагнитных колебаний, излучаемых неподвижным в К системе отсчета источником, то $\omega'-$частота колебаний, воспринимаемых приемником, движущимся вместе с системой К′ со скоростью v. Излучаемая источником частота ω может быть найдена по измеренной приемником частоте ω' в системе К′ по формуле:

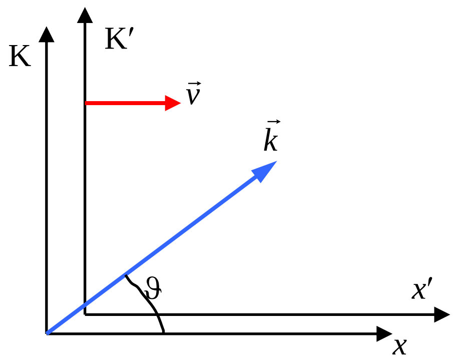

Рис. 9.4.

$$\omega = \omega' \frac{\sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 - \frac{v}{c}\cos\vartheta} \qquad (1.9.26)$$

Получили снова эффект Доплера, который ранее нами рассматривался в релятивистской механике.

Напомним, например, продольный эффект Доплера. Пусть свет распространяется вдоль положительного направления оси x, тогда $\cos\vartheta = 1$. Тогда, если частота света в системе К равна ω, то воспринимаемая в системе К′ частота равна:

$$\omega' = \omega \sqrt{\frac{1 - v/c}{1 + v/c}} \qquad (1.9.27)$$

т.е. меньше, чем излучаемая частота.

Пусть свет распространяется вдоль отрицательного направления оси x, тогда $\cos\vartheta = -1$, т.е. свет распространяется навстречу приемнику в системе К′. Тогда воспринимаемая частота в системе К′ равна:

$$\omega' = \omega \sqrt{\frac{1 + v/c}{1 - v/c}} \qquad (1.9.28)$$

Воспринимаемая частота в К′ системе больше излучаемой в системе К.

Поперечный эффект Доплера, когда направления движения системы К′ перпендикулярно распространению света:

$$\omega' = \frac{\omega}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \qquad (1.9.29)$$

Напомним, также, что если продольный эффект Доплера проявляется и в нерелятивистской механике, то поперечный эффект - чисто релятивистский эффект.