

ВОЛНОВАЯ ОПТИКА

Глава 2. Интерференция и дифракция.

2.1. Интерференция когерентных волн.

2.1.1. Условия проявления интерференции.

Интерференция волн – сложение в пространстве двух или нескольких волн, при котором в разных точках пространства получается усиление или ослабление амплитуды результирующей волны.

Сложение электромагнитных волн рассматривалось ранее в §§4-5 Главы 1 как суперпозиция волн, распространяющихся в одном направлении (биения, стоячие волны). Под интерференцией рассматривается исследование или наблюдение не по распределению амплитуды E , а по распределению энергии, причем усредненному по времени. Поэтому *под интерференцией света (или э/м волн) часто понимают пространственное перераспределение энергии светового излучения при наложении двух или нескольких волн*. В этой главе мы в основном будем касаться оптического диапазона электромагнитных волн, хотя общие соотношения справедливы для всего диапазона.

Энергия, приходящая на экран или единичную площадку пространства, пропорциональна вектору Пойнтинга $\vec{S} = \frac{c}{4\pi} [\vec{E}, \vec{H}]$. Однако в явлениях интерференции и дифракции интересуются относительными

значениями, а не абсолютными значениями напряженности E и энергии W . В этой главе мы не будем заниматься абсолютными энергетическими величинами, такими как лучистый и световой поток, яркость, освещенность и другие. Эти величины обычно рассматриваются в фотометрии. Нас будет интересовать относительное распределение световой энергии или потока энергии.

В исследовании явления интерференции вводят энергетическую величину – *интенсивность* света или электромагнитных колебаний. Вводят ее по-разному: либо как среднее по времени от вектора плотности потока $\langle \vec{S} \rangle$, либо без всяких дополнительных коэффициентов как величину пропорциональную $\sim \langle E^2 \rangle$. Поскольку в этой главе нас интересуют относительные интенсивности света, то в настоящем рассмотрении коэффициентами можно пренебречь и положить, что интенсивность с точностью до постоянных равна

$$I = \langle E^2 \rangle.$$

Пусть в некоторой точке одновременно существуют 2 колебания от электромагнитных волн $E_1(\vec{r}, t)$ и $E_2(\vec{r}, t)$. Результирующее поле определяется как сумма напряженностей электрических полей, а интенсивность как квадрат суммы:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2, \quad E^2 = (\vec{E}_1 + \vec{E}_2)^2 = E_1^2 + E_2^2 + 2\vec{E}_1\vec{E}_2 \quad (2.1.1)$$

Усредним по времени, т.к. приборы обладают инерционностью и поэтому показывают картину, усредненную за время их инерционности, которое значительно больше времени атомных процессов:

$$\langle E^2 \rangle = \langle E_1^2 \rangle + \langle E_2^2 \rangle + 2\langle \vec{E}_1\vec{E}_2 \rangle \quad (2.1.2)$$

Последнее слагаемое в этом выражении называется обычно *интерференционным членом*. При усреднении по времени возможно 2 случая:

1. Интерференционный член $2\langle \vec{E}_1\vec{E}_2 \rangle$ обращается в нуль, при этом результирующая интенсивность равна сумме интенсивностей отдельных волн и *интерференция отсутствует*:

$$I = \langle \vec{E}_1^2 \rangle + \langle \vec{E}_2^2 \rangle = I_1 + I_2. \quad (2.1.3)$$

2. Если интерференционный член отличен от нуля $2\langle \vec{E}_1\vec{E}_2 \rangle \neq 0$, то *имеет место интерференция*. Полная интенсивность равна:

$$I = I_1 + I_2 + I_{12}, \quad \text{где } I_{12} = 2\langle \vec{E}_1\vec{E}_2 \rangle. \quad (2.1.4)$$

Примечание 1. Скалярное произведение $\vec{E}_1\vec{E}_2$ равно нулю, если складываемые волны линейно поляризованы в ортогональных направлениях. Отсутствие интерференции у волн, поляризованных во

взаимно перпендикулярных направлениях, было обнаружено О. Френелем и Д. Араго в 1816 г. и интерпретировано в 1817 г. Т. Юнгом как доказательство поперечности электромагнитных волн

Огюстен Жан Френель, французский физик, 1788–1827;

Доменик Франсуа Араго, французский физик, 1786–1853;

Томас Юнг, английский физик, 1773–1829).

Рассмотрим случай, когда интерференция имеет место, т.е. интерференционный член не равен нулю. Пусть складываются 2 волны с одинаковым направлением колебаний вектора \vec{E} и одинаковой частоты $\omega = const$, причем амплитуды E_0 и фазы φ зависят от времени (рассматриваем сложение волн в одной точке, поэтому можно не писать полностью бегущий множитель или положить $\vec{r} = 0$):

$$\begin{aligned} E_1(t) &= E_{10}(t) \cos(\omega t - \varphi_1(t)) \\ E_2(t) &= E_{20}(t) \cos(\omega t - \varphi_2(t)) \end{aligned} \quad (2.1.5)$$

Сложим эти колебания в точке наблюдения (характеризуемой радиус-вектором \vec{r}), тогда, как ранее получали в §1.4, получим гармоническое колебание той же частоты:

$$E(t) = E_1(t) + E_2(t) = E_0(t) \cos(\omega t - \varphi_0(t)) \quad (2.1.6)$$

Выражение для амплитуды и для фазы можно получить, если разложить косинусы в формулах (2.1.6) и (2.1.5)

$$\begin{aligned} E_{10} \cos \omega t \cdot \cos \varphi_1 + E_{10} \sin \omega t \cdot \sin \varphi_1 + E_{20} \cos \omega t \cdot \cos \varphi_2 + E_{20} \sin \omega t \cdot \sin \varphi_2 = \\ = E_0 \cos \omega t \cdot \cos \varphi_0 + E_0 \sin \omega t \cdot \sin \varphi_0 \end{aligned}$$

Далее, в силу произвольности рассматриваемого времени t для выполнения последнего равенства необходимо приравнять отдельно слагаемые при $\cos \omega t$ и $\sin \omega t$. При этом получим систему двух уравнений,

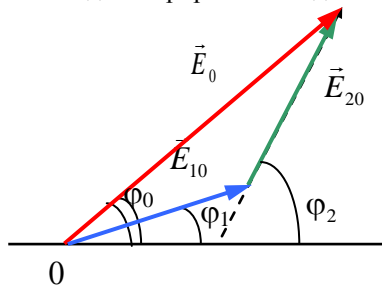


Рис. 1.1.

из которых находим амплитуду результирующих колебаний E_0 и фазу φ_0 .

Однако амплитуду результирующего колебания проще всего найти, если воспользоваться векторной диаграммой (рис. 1.1), в которой угол между горизонтальной осью и вектором \vec{E} дает значение фазы в данный момент времени (аналогично диаграммам в Главе 4 Колебания из раздела Механика). Из рисунка 1.1 получаем:

$$E_0^2(t) = E_{10}^2(t) + E_{20}^2(t) + 2E_{10}(t)E_{20}(t) \cos(\varphi_2(t) - \varphi_1(t)) \quad (2.1.7a)$$

$$\operatorname{tg} \varphi_0 = \frac{E_{10}(t) \sin \varphi_1(t) + E_{20}(t) \sin \varphi_2(t)}{E_{10}(t) \cos \varphi_1(t) + E_{20}(t) \cos \varphi_2(t)} \quad (2.1.7b)$$

Если колебания случайно обрываются или происходит хаотическое изменение их фазы за время измерения (усреднения), то на эксперименте получим всегда сумму интенсивностей (2.1.3). В самом деле, даже если амплитуды складывающихся волн неизменны за время усреднения, то в результате усреднения имеем:

$$\langle E^2 \rangle = \frac{1}{t} \int_0^t E^2 dt = \langle E_{10}^2 \rangle + \langle E_{20}^2 \rangle + 2E_{10}E_{20} \frac{1}{t} \int_0^t \cos[\varphi_1(t) - \varphi_2(t)] dt \quad (2.1.8)$$

И при хаотическом изменении фаз $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$ получаем, что:

$$\int_0^t \cos[\varphi_1(t) - \varphi_2(t)] dt = 0,$$

и тогда интерференция отсутствует.

Отсюда получаем *необходимое условие* существования (наблюдения) интерференции: за время усреднения разность фаз $\varphi_1(t) - \varphi_2(t)$ должна сохранять свое значение. Одно из фундаментальных понятий в физике – *когерентные колебания* – это колебания, для которых разность фаз за время наблюдения *остается неизменной*:

$$\varphi_1(t) - \varphi_2(t) = const \quad (2.1.9)$$

В общем, *когерентностью называют согласованное протекание во времени и в пространстве нескольких колебательных или волновых процессов, протекающее при их сложении*. Степень согласованности может

быть различной в пространстве и во времени, поэтому и различают временную и пространственную когерентность. Эти понятия рассмотрим в следующем параграфе.

2.1.2. Оптическая разность хода.

Рассмотрим распространение световых волн в среде. Скорость их распространения зависит от характеристик проницаемости среды и равна:

$$v = \frac{c}{\sqrt{\epsilon\mu}} = \frac{c}{n}, \quad (2.1.10)$$

где $n = \sqrt{\epsilon\mu}$ – *показатель преломления* среды.

Пусть имеем 2 когерентные волны. В реальной ситуации обычно одна волна разделяется на 2 волны, например в точке O они разделяются, идут разными путями, а затем они встречаются в точке наблюдения (P). Пусть одна волна распространяется в среде с показателем преломления n_1 и проходит путь S_1 , а вторая проходит путь S_2 в среде с n_2 . Если фазу волны в исходной точке O положить равной ωt , то в точке P

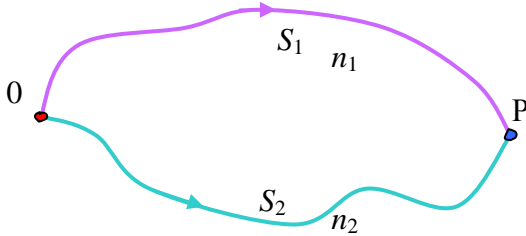


Рис. 1.2.

имеем следующие 2 волны:

$$\text{первая волна } E_{10} \cos \left[\omega \left(t - \frac{S_1}{v_1} \right) \right], \quad \text{и вторая волна } E_{20} \cos \left[\omega \left(t - \frac{S_2}{v_2} \right) \right]$$

где $v_1 = c/n_1$ и $v_2 = c/n_2$ – скорости распространения волн в двух средах. При сложении волн получаем следующее выражение для интерференционного члена:

$$2E_{10}E_{20} \cos[\varphi_2(t) - \varphi_1(t)] = 2E_{10}E_{20} \cos \delta \quad (2.1.11)$$

где разность фаз записывается:

$$\delta = \varphi_2(t) - \varphi_1(t) = \omega \left(\frac{S_2}{v_2} - \frac{S_1}{v_1} \right) = \frac{\omega}{c} (S_2 n_2 - S_1 n_1) = \frac{\omega}{c} \Delta = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta \quad (2.1.12)$$

Здесь величина

$$\Delta \equiv n_2 S_2 - n_1 S_1 \quad (2.1.13)$$

носит название *оптической разности хода*. В результате сложения волн в точке P в зависимости от величины разности хода получаем различную интенсивность освещенности, например максимум или минимум:

$$\max I = I_{\max} \quad \text{при} \quad \cos \delta = 1, \quad \Delta \frac{2\pi}{\lambda} = 2m\pi, \quad \Delta = 2m \frac{\lambda}{2} \quad (2.1.14)$$

$$\min I = I_{\min} \quad \text{при} \quad \cos \delta = -1, \quad \Delta \frac{2\pi}{\lambda} = (2m+1)\pi, \quad \Delta = (2m+1) \frac{\lambda}{2} \quad (2.1.15)$$

Таким образом, если оптическая разность хода равна четному числу полувольт, получаем в точке наблюдения максимум интенсивности, а в случае нечетного числа полувольт, имеем минимум. В дальнейшем при решении задач на определения положений максимумов и минимумов достаточно определять оптическую разность хода волн от двух источников.

2.1.3. Интерференция от двух источников.

Рассмотрим случай интерференции волн от двух одинаковых синфазных монохроматических точечных источников S_1 и S_2 , расположенных на расстоянии d друг от друга. Точечные источники излучают сферические волны, поэтому направление волнового вектора совпадает с направлением радиус-вектора (см рис. 1.3). На экране волновые поля перекрываются, и при этом образуется устойчивая картина распределения интенсивности – *интерференционная картина* или интерференционное поле. Если расстояние l до экрана много больше расстояния между источниками ($l \gg d$), то амплитуды обеих волн в точке наблюдения практически одинаковы, и напряженность поля в точке P описывается выражением:

$$E = E_0 \cos(\omega t - k_1 r_1) + E_0 \cos(\omega t - k_2 r_2) = 2E_0 \cos\left[\frac{k(r_2 - r_1)}{2}\right] \cos\left[\omega t - \frac{k(r_2 + r_1)}{2}\right], \quad (2.1.16)$$

где r_1 и r_2 – расстояния от источников до точки наблюдения. Здесь мы воспользовались тем, что при условии $l \gg d$ направления векторов \vec{k}_1 и \vec{k}_2 практически одинаковы, а по модулю они равны. Введем угол ϑ , образуемый направлением на точку наблюдения с “оптической осью” рассматриваемой схемы (перпендикуляром к линии, соединяющей источники). В силу условия $l \gg d$ угол ϑ (см рис. 1.3) практически одинаков для всех векторов, тогда оптическая разность хода этих волн определяется

$$\Delta = nr_2 - nr_1 \approx nd \sin \vartheta.$$

Интенсивность результирующих колебаний пропорциональна квадрату амплитуды, поэтому имеем:

$$I = 4I_0 \cos^2(k_0 \Delta / 2) = 2I_0 (1 + \cos k_0 \Delta), \quad (2.1.17)$$

где I_0 – интенсивность колебаний, приходящих от одного источника, а волновое число $k_0 = \omega/c$. Из полученного выражения следует, что минимальная освещенность экрана равна нулю, а максимальная – учетверенному значению освещенности, создаваемой одним источником. Положение максимумов определяется условием

$$k_0 \Delta = \pm 2\pi m, \quad (2.1.18)$$

где целое число $m = 0, 1, 2, \dots$ называется *порядком интерференции*. Учитывая, что $k_0 = 2\pi/\lambda_0$, где λ_0 – длина волны в

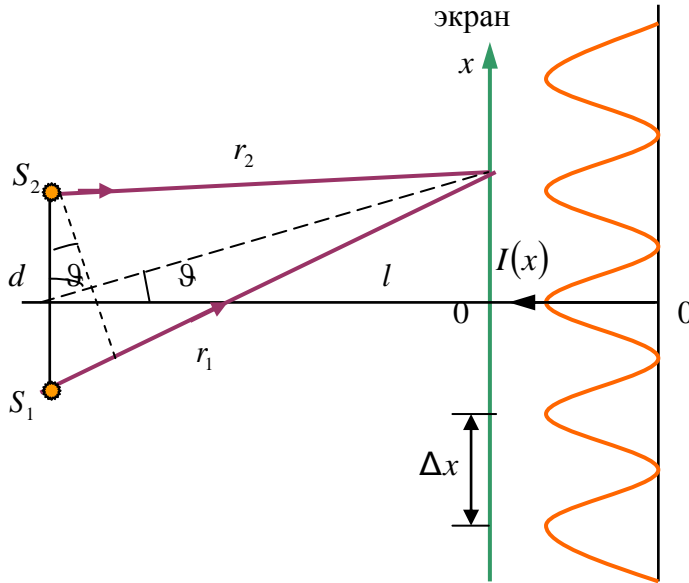


Рис. 1.3.

вакууме, условие образования максимумов можно записать в виде

$$\Delta = m\lambda_0 \quad (2.1.19)$$

т.е. разность хода (интерферирующих волн) равна целому числу длин волн.

Положение минимумов находится из условия

$$\Delta = nd \sin \vartheta = (2m + 1) \frac{\lambda_0}{2} \quad (2.1.20)$$

Для определения зависимости освещенности экрана от координаты x (см рис. 1.3) нужно выразить разность хода Δ интерферирующих волн через координату x точки наблюдения P . Практически важным является случай малых значений угла наблюдения ϑ . При $\vartheta \ll 1$

$$\sin \vartheta \approx \operatorname{tg} \vartheta = \frac{x}{l}$$

и разность хода можно представить как

$$\Delta = nd \sin \vartheta \approx \frac{ndx}{l}. \quad (2.1.21)$$

Подставляя теперь в (2.1.17), получаем

$$I(x) = 2I_0 \left[1 + \cos(k_0 nd \cdot x/l) \right]. \quad (2.1.22)$$

В точке $x = 0$ расположен максимум освещенности, соответствующий нулевой разности хода. Это *центр интерференционной картины*. Для него порядок интерференции $m = 0$. *Пространственный период интерференционной картины* или *ширина интерференционной полосы* Δx – это расстояние между соседними максимумами или минимумами. Например, координата m -го максимума определяется из условия

$$x_m = \frac{\Delta_m l}{nd} = \frac{m\lambda_0 l}{nd} = m \frac{l\lambda}{d}, \quad (2.1.23)$$

где $\lambda = \lambda_0/n$ – длина волны в среде. Соседний $(m+1)$ -ый максимум определяется координатой:

$$x_{m+1} = (m+1) \frac{\lambda l}{d} \quad (2.1.24)$$

Откуда получаем ширину интерференционной полосы:

$$\Delta x = x_{m+1} - x_m = \lambda \frac{l}{d} \quad (2.1.25)$$

Примечание 2. Ширину интерференционной полосы (2.1.25) можно получить сразу, исходя из условия $kd\Delta x/l = 2\pi$ учитывая, что $k = 2\pi/\lambda$.

Рассмотрим далее интерференцию 2-х плоских волн. На самом деле это то же самое, что интерференция волн от двух точечных источников, но при этом рассматривается 2 плоские волны и задается угол между направлениями их распространения. Предположим, что обе плоские монохроматические волны имеют одинаковые частоты, для простоты имеют одинаковые амплитуды, и характеризуются волновыми векторами \vec{k}_1 и \vec{k}_2 , задающими направления их распространения. Рассмотрим эти волны в плоскости x и y . На рисунке 1.4 ось x направлена симметрично относительно векторов \vec{k}_1 и \vec{k}_2 интерферирующих волн, ось y лежит в плоскости рисунка, а ось z – перпендикулярна плоскости рисунка. Поскольку угол между векторами \vec{k}_1 и \vec{k}_2 лежит в плоскости (x,y) и от оси z ничего не зависит, то тогда эти волны записываются:

$$\begin{aligned} E_1 &= E_0 \cos(\omega t - \vec{k}_1 \vec{r}) = E_0 \cos\left(\omega t - k \cos \frac{\alpha}{2} \cdot x - k \sin \frac{\alpha}{2} \cdot y\right), \\ E_2 &= E_0 \cos(\omega t - \vec{k}_2 \vec{r}) = E_0 \cos\left(\omega t - k \cos \frac{\alpha}{2} \cdot x + k \sin \frac{\alpha}{2} \cdot y\right). \end{aligned} \quad (2.1.26)$$

Суммарная волна в точке (x,y) определяется сложением волн (2.1.26):

$$E = 2E_0 \cos\left(k \sin \frac{\alpha}{2} \cdot y\right) \cos\left(\omega t - k \cos \frac{\alpha}{2} \cdot x\right) \quad (2.1.27)$$

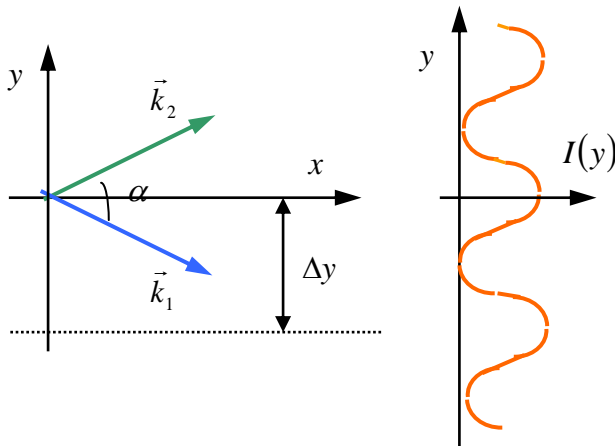


Рис. 1.4.

Таким образом, получаем стоячую волну по оси y и бегущую волну по оси x . Т.е. максимумы и минимумы, распределенные по оси y , распространяются по оси x . Если перпендикулярно биссектрисе угла α между направлениями волн поместить плоский экран (рис. 1.4), то на нем будут наблюдаться чередующиеся светлые и темные **интерференционные полосы**.

Ширина интерференционной полосы по оси y определяется положением соседних максимумов, т.е. определяется условием:

$$k \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \Delta y = \pi$$

Откуда получаем:

$$\Delta y = \frac{\pi}{k \sin \alpha/2} = \frac{\lambda}{2 \sin \alpha/2}. \quad (2.1.28)$$

Для волн, распространяющихся под малым углом друг к другу ($\alpha \ll 1$), ширина интерференционной полосы определяется соотношением $\Delta y \approx \lambda/\alpha$.

Если начало отсчета по оси x выбрать в одном из максимумов, то зависимость освещенности (интенсивности) экрана от координаты y дается выражением

$$I(y) = 2I_0 [1 + \cos(2\pi y/\Delta y)] = 4I_0 \cos^2(\pi y/\Delta y), \quad (2.1.29)$$

Освещенность экрана изменяется от минимального значения, равного нулю, до максимального значения, равного учетверенному значению освещенности, которая создается одной волной. Если экран наклонить на угол β , то ширина полосы увеличится и станет равной $\Delta y/\cos\beta$.

Примечание 3. Если для случая интерференции 2-х точечных источников, ввести угол схождения лучей $\alpha \approx d/l$ (т.е. угол, под которым видны источники из точки наблюдения P), то расстояние между соседними экстремумами можно представить как $\Delta y \approx \lambda/\alpha$. Этот результат совпадает с полученным выше для интерференции плоских волн, распространяющихся под углом α по отношению друг к другу. Таким образом, как уже было замечено, на большом расстоянии от источников сферические волны на небольших участках можно приближенно рассматривать как плоские, угол между направлениями которых при $\vartheta \ll 1$ может быть принят приближенно равным d/l .
