

2.5. Дифракция Фраунгофера.

2.5.1. Дифракция на прямоугольной щели.

Дифракция Фраунгофера – это дифракция в параллельных лучах. Явление дифракции Фраунгофера имеют наибольший практический интерес, т.е. явления, наблюдаемые при падении на экран (или отверстие в экране) параллельного пучка света. Обычно размеры щелей в дифракции Фраунгофера для точки наблюдения меньше размеров 1-ой зоны Френеля. В результате дифракции пучок утрачивает параллельность, т.е. появляется свет, распространяющийся в направлениях, отличных от первоначального направления распространения. Распределение его интенсивности на очень большом (в пределе – бесконечно большом) расстоянии от препятствия соответствует *дифракции Фраунгофера*.

Волны, возникающие в результате ограничения фронта падающей плоской волны при прохождении сквозь отверстие в экране, называют *дифрагировавшими*, а нормали к их волновым поверхностям – *дифрагировавшими лучами*. В рамках геометрической оптики они не существуют. Возникновение дифрагировавших волн при прохождении через отверстие означает, что волна с ограниченной площадью поперечного сечения не может быть строго плоской.

Практически дифракцию Фраунгофера наблюдают не “в бесконечности”, а в фокальной плоскости объектива или с помощью зрительной трубы, установленной на бесконечность. Падающий на экран параллельный пучок можно получить, если точечный источник S поместить в фокус линзы L' (коллиматора) как показано на рис. 5.1.

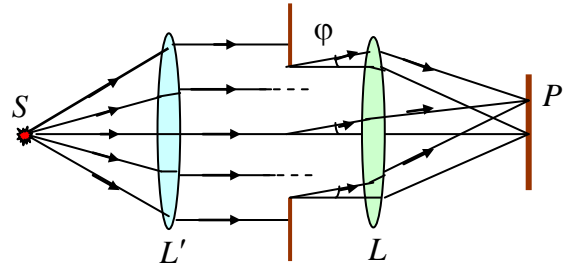


Рис. 5.1.

Если отверстие в экране представляет собой узкую щель, то изображение точечного источника S в фокальной плоскости объектива L растянется в полоску, перпендикулярную щели. Освещенность полоски от середины к краям уменьшается немонотонно, проходя через ряд минимумов и максимумов. При повороте щели вся картина также поворачивается. Если роль источника выполняет светящаяся нить, параллельная щели, то наблюдаемое в фокальной плоскости объектива изображение нити оказывается растянутым в перпендикулярном щели направлении. При использовании лазерного источника излучения коллиматор и объектив не нужны.

Распределение интенсивности света при дифракции Фраунгофера можно найти с помощью принципа Гюйгенса – Френеля. Интенсивность в определенной точке P фокальной плоскости объектива L обусловлена интерференцией вторичных волн, исходящих от всех элементарных участков отверстия экрана и распространяющихся в одном и том же направлении, задаваемом углом φ .

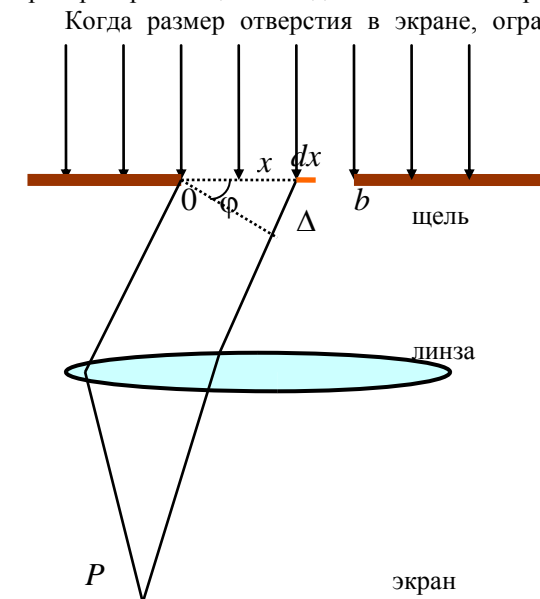


Рис. 5.2.

Когда размер отверстия в экране, ограничивающем размер пучка, велик по сравнению с длиной световой волны, напряженность поля на вспомогательной поверхности S , совпадающей с отверстием, можно считать такой же, как при отсутствии экрана. Ограничимся рассмотрением малых углов φ (рис. 5.2), т.к. лишь волны, дифрагировавшие на малые углы, будут иметь заметную интенсивность.

Рассмотрим случай (простой, но практически важный), когда отверстие в экране имеет вид узкой длинной щели с параллельными краями и шириной b (см рис. 5.2). Элементарные участки волнового фронта в форме узких длинных полосок, параллельных краям щели, становятся источниками вторичных цилиндрических волн. Амплитуды волн, приходящих в точку P от разных полосок, одинаковы, т.к. все элементы поверхности S имеют одинаковую площадь и одинаковый наклон к направлению вторичных волн. Соотношение фаз этих волн в точке P будет таким же, как и в любой плоскости, перпендикулярной направлению распространения вторичных волн до линзы.

Разобьем волновую поверхность в щели (см рис. 5.2) на маленькие участки dx , каждый из них в точке P создает колебание dE . При не слишком больших углах φ коэффициент $K(\varphi) = const$, тогда вклад от элемента dx можно записать в обычном виде:

$$dE = Ka_0 \cos(\omega t - kx)dx \quad (2.5.1)$$

Здесь множителя $1/r$ в амплитуде нет, поскольку рассматриваются плоские волны. Учтем полную амплитуду волны, проходящей в щель. Вклад от кусочка dx во входящую амплитуду равен: $dA = a_0 dx$. Тогда от всей щели вклад в амплитуду равен:

$$A_0 = \int dA = \int_0^b a_0 dx = a_0 b,$$

откуда имеем

$$a_0 = \frac{A_0}{b}. \quad (2.5.2)$$

Однако амплитуда, распространяющаяся под углом φ от различных участков щели, идет с различной фазой, поэтому необходимо учесть фазовые соотношения. Пусть от участка экрана слева в точке $x = 0$ фаза приходящей волны в точку P равна 0 (для этого всегда можно выбрать необходимый момент времени t). Тогда от кусочка dx , находящегося на расстоянии x от края щели, оптическая разность хода составляет

$$\Delta = x \sin \varphi \quad (2.5.3)$$

То есть от точки $x = 0$ волна приходит с фазой ωt , а от точки x с фазой $\omega t - 2\pi\Delta/\lambda$, где λ – длина волны в среде. Итак, вклад от кусочка dx равен:

$$dE = \frac{A_0}{b} \cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} x \sin \varphi\right) dx \quad (2.5.4)$$

Здесь мы положили $K = 1$, хотя все это не имеет значения, т.к. нам важен относительный вклад в различных точках экрана. Тогда вклад от всей щели в направлении, определяемым углом φ , равен:

$$\begin{aligned} E &= \frac{A_0}{b} \int_0^b \cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} x \sin \varphi\right) dx = \frac{A_0}{b} \left(-\frac{\lambda}{2\pi \sin \varphi}\right) \left[\sin\left(\omega t - \frac{2\pi b}{\lambda} \sin \varphi\right) - \sin \omega t \right] = \\ &= A_0 \frac{\sin\left(\frac{\pi b}{\lambda} \sin \varphi\right)}{\frac{\pi b}{\lambda} \sin \varphi} \cos\left(\omega t - \frac{\pi b}{\lambda} \sin \varphi\right) \end{aligned} \quad (2.5.5)$$

При этом воспользовались тригонометрическим соотношением:

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2}.$$

Итак, полная амплитуда под углом φ :

$$E_\varphi = A_0 \frac{\sin\left(\frac{\pi b}{\lambda} \sin \varphi\right)}{\frac{\pi b}{\lambda} \sin \varphi} \quad (2.5.6)$$

При $\varphi = 0$ имеем $E_{\varphi=0} = A_0$, то есть получаем максимальную амплитуду в центре дифракционной картины. Распределение интенсивности получаем, исходя из того, что интенсивность в центре дифракционной картины пропорциональна квадрату амплитуды $I_0 \sim |A_0|^2$, тогда под углом φ имеем

$$I_\varphi \sim |E_\varphi|^2:$$

$$I_{\varphi} = I_0 \frac{\text{Sin}^2\left(\frac{\pi b}{\lambda} \text{Sin}\varphi\right)}{\left(\frac{\pi b}{\lambda} \text{Sin}\varphi\right)^2} = I_0 \frac{\text{Sin}^2 u}{u^2} \quad (2.5.7)$$

где $u = 1/2 \cdot kb \sin \varphi = \pi b/\lambda \cdot \sin \varphi$. Получаем чередование длинных полос – максимумов и минимумов – с изменением угла наблюдения φ . При $\varphi = 0$ получаем центральный максимум интенсивности $I = I_0$. Условия появления минимумов:

$$\frac{\pi b}{\lambda} \text{Sin}\varphi_m = m\pi \quad \text{или} \quad \text{Sin}\varphi_m = \frac{\lambda}{b} m \quad (2.5.8)$$

Число минимумов ограничено условием $\text{Sin}\varphi \leq 1$, откуда из (2.5.8) имеем $m \leq b/\lambda$. Угловая ширина главного максимума определяется условием $b \text{Sin}\varphi = \pm \lambda$ и отсюда

$$\Delta\varphi = 2 \cdot \arcsin \frac{\lambda}{b} \quad (2.5.9)$$

Если $b \gg \lambda$, то $\delta\varphi \approx 2\lambda/b$.

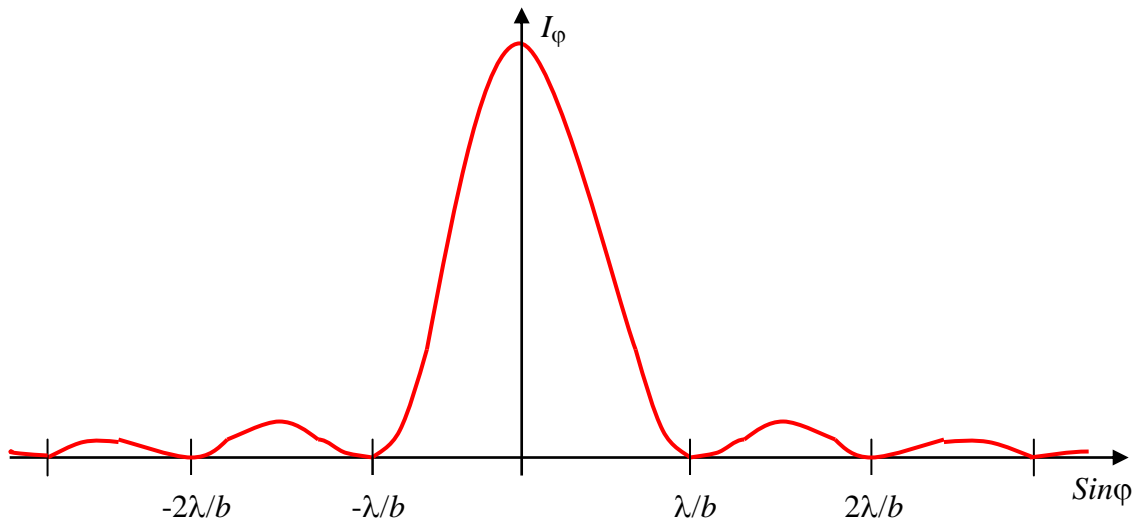


Рис. 5.3.

Положение максимумов интенсивности определяется уравнением

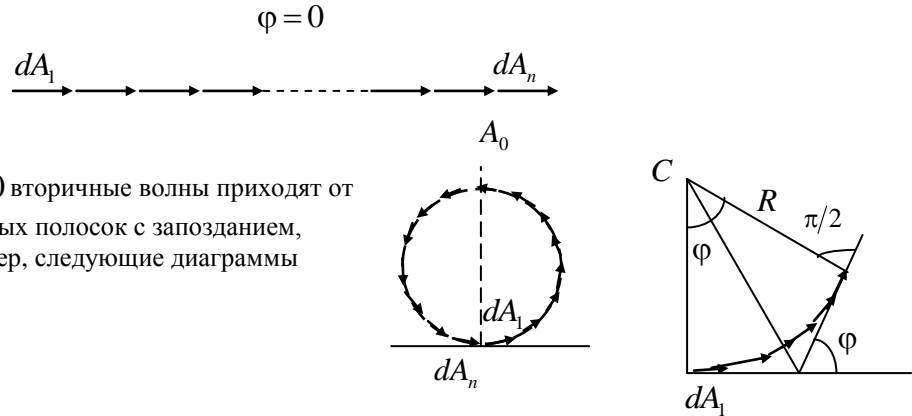
$$\left(I_0 \frac{\text{Sin}^2 u}{u^2} \right)'_u = 0, \text{ т.е. уравнением } \text{tgu} = u.$$

Последнее имеет корни $u_0 = 0$; $u_1 = 1,43\pi$; $u_2 = 2,46\pi$; $u_3 = 3,47\pi$ и так далее. Значения интенсивности в максимумах быстро убывает с увеличением порядка. Их отношения приближенно можно выразить как $1 : [2/(3\pi)]^2 : [2/(5\pi)]^2 : \dots$. Высота максимума интенсивности пропорциональна **квадрату ширины щели**, т.к. возрастающий пропорционально b световой поток распространяется в пределах убывающего угла ($\varphi_1 \sim 1/b$). Относительная интенсивность остается неизменной: распределение света по максимумам разных порядков не зависит от ширины щели. При сужении щели картина расширяется, а её яркость уменьшается. Когда размер b приближается к длине волны λ , центральный максимум охватывает все поле зрения; освещенность экрана уменьшается от центра к краям монотонно.

Полученные результаты можно использовать для оценки дифракционной расходимости пучков света, например, в результате прохождения через диафрагму. Основная часть светового потока приходится на центральный дифракционный максимум, поэтому его ширину можно принять в качестве оценки угловой расходимости $\Delta\varphi$ пучка с поперечным сечением b : $\Delta\varphi \sim \lambda/b$. Это угловое уширение пучка обусловлено

волновой природой света, и его *в принципе* нельзя устранить при заданной ширине сечения пучка. Строго параллельных световых пучков не существует. На пути длиной l пучок претерпевает дифракционное уширение порядка $l \cdot \Delta\phi = \lambda l/b$. Этим уширением можно пренебречь лишь тогда, когда оно мало по сравнению с исходной шириной пучка, т.е. при условии $\lambda l \ll b^2$. В таких условиях пучок можно считать параллельным и использовать для его описания геометрическую оптику.

Наглядное представление о суммировании вторичных волн для нахождения распределения интенсивности при дифракции Фраунгофера на щели можно получить с помощью векторных диаграмм. Колебания в точке наблюдения P , вызванные вторичными волнами от одинаковых элементарных полосок вспомогательной поверхности S , изображаются векторами dA_i одинаковой длины. Центру дифракционной картины ($\phi = 0$), куда все вторичные волны приходят в одинаковой фазе, соответствует диаграмма



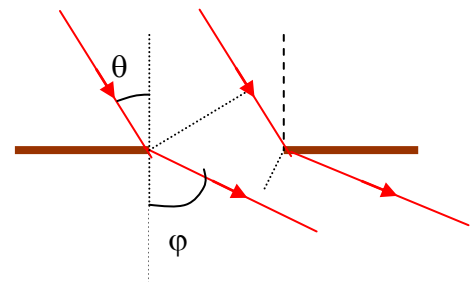
При других углах $\phi \neq 0$ вторичные волны приходят от отдаленных элементарных полосок с запозданием, поэтому имеем, например, следующие диаграммы сложения фаз:

Примечание 1. Если наклонное падение волны, то разность хода между крайними точками равна

$$\Delta = b(\sin\phi - \sin\theta) \quad (2.5.10)$$

Отсюда условия минимумов:

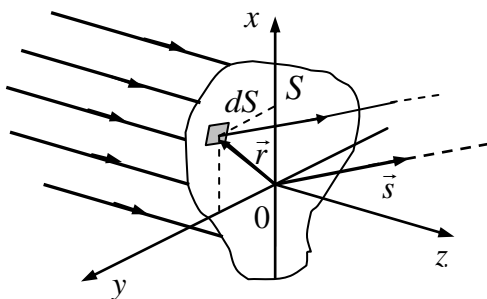
$$b(\sin\phi - \sin\theta) = m\lambda$$



Примечание 2. Йозеф Фраунгофер, немецкий физик, 1787–1826

2.5.2. Дифракция на отверстии.

Рассмотрим дифракцию Фраунгофера при падении плоской волны на *отверстие в экране*. В отличие от длинной щели здесь волны дифрагируют во всех направлениях. Каждой точке наблюдения P соответствует определенное направление дифрагировавших волн, которое можно задать единичным вектором \vec{s} . В качестве вспомогательной поверхности S выберем плоскость экрана xOy .



Разность хода вторичных волн, идущих по направлению \vec{s} от элемента dS этой поверхности и из начала координат O равна проекции вектора \vec{r} , определяющего положение dS в плоскости xOy , на направление \vec{s} , т.е. $\vec{r} \cdot \vec{s}$. В соответствии с принципом Гюйгенса–Френеля напряженность поля в точке P

пропорциональна интегралу по всей площади отверстия в экране:

$$E_P \sim \int E(\vec{r}) \exp[-ik(\vec{r}\vec{s})] dS = \int E(\vec{r}) \exp(-ik\vec{r}) dS, \quad (2.5.11)$$

где $\vec{k} = k\vec{s}$ – волновой вектор световой волны, дифрагировавшей в направлении \vec{s} . Опушенный в этом выражении коэффициент наклона $K(\varphi)$ можно считать постоянным, когда размеры отверстия много больше длины световой волны. При этом заметную интенсивность имеют лишь волны, дифрагировавшие на малые углы α . Напряженность $E(\vec{r})$ в плоскости xOy принимается в пределах отверстия в экране равной напряженности поля падающей волны и равной нулю за его пределами. Если понимать $E(x, y)$ именно таким образом, то можно распространить интегрирование в (2.5.11) на всю плоскость xOy (Бутиков, с.292):

$$E_P \sim \iint E(x, y) \exp[-i(k_x x + k_y y)] dx dy \equiv E(k_x, k_y). \quad (2.5.11)$$

а) Дифракция Фраунгофера на прямоугольном отверстии.

При нормальном падении плоской волны на прямоугольное отверстие со сторонами a и b , параллельными осям x и y , соответственно, для (2.5.11) получаем

$$E_P \sim E \int_{-a/2}^{a/2} \int_{-b/2}^{b/2} \exp[-i(k_x x + k_y y)] dx dy = Eab \frac{\sin u_1}{u_1} \frac{\sin u_2}{u_2}, \quad (2.5.12)$$

где $u_1 = k_x a/2$; $u_2 = k_y b/2$. Распределение интенсивности в дифракционной картине определяется выражением

$$I = I_0 \left(\frac{\sin u_1}{u_1} \right)^2 \left(\frac{\sin u_2}{u_2} \right)^2. \quad (2.5.13)$$

Таким образом, в дифракционной картине от прямоугольного отверстия распределение интенсивности определяется произведением распределений интенсивностей от взаимно перпендикулярных щелей. Интенсивность практически равна нулю вдоль взаимно перпендикулярных рядов линий, параллельных сторонам прямоугольника. Заметную интенсивность имеют лишь средние цепочки максимумов, образующие “крест”. Относительная высота максимумов интенсивности, расположенных вдоль этих линий, характеризуется тем же соотношением, что и для дифракции света от точечного источника на длинной узкой щели:

$$1 : [2/(3\pi)]^2 : [2/(5\pi)]^2 : \dots$$

Величина остальных максимумов столь мала (0,2% для ближайших к центру), что они практически не видны. Большая часть светового потока приходится на центральный максимум, который можно рассматривать как получающееся в фокальной плоскости объектива изображение находящегося в фокусе коллиматора точечного источника при ограничении сечения пучка света прямоугольной диафрагмой. Это изображение шире в направлении более короткой стороны прямоугольника.

б) Дифракция Фраунгофера на круглом отверстии.

Дифракция Фраунгофера от круглого отверстия представляет большой практический интерес, так как в оптических приборах оправы линз и объективов, также диафрагмы имеют обычно круглую форму. В рассматриваемом случае при вычислении интеграла (2.5.11) целесообразно перейти к полярным координатам ρ и φ в плоскости отверстия: $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$.

Направление \vec{s} дифрагировавшей волны, соответствующее точке P , удобно характеризовать углом ϑ с осью z и азимутальным углом ψ : $k_x = k \sin \vartheta \cos \psi$; $k_y = k \sin \vartheta \sin \psi$. Тогда $k_x x + k_y y = k \rho \sin \vartheta \cos(\varphi - \psi)$ и интеграл (2.5.11) принимает вид:

$$E_P \sim E \int_0^a \int_0^{2\pi} \exp[-ik\rho \sin \vartheta \cos(\varphi - \psi)] \rho d\rho d\varphi.$$

Здесь a – радиус отверстия. Используя интегральное представление для специальных функций Бесселя $J_n(z)$ при $n = 0$:

$$J_0(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp(iz \cos \varphi) d\varphi,$$

выразим напряженность поля вторичных волн в точке P через интеграл от $J_0(k\rho \sin \vartheta)$, который вычисляется с помощью соотношения $\int z J_0(z) dz = z J_1(z)$. Таким образом, дифракционная картина от круглого отверстия имеет вид **совокупности светлых и темных колец** со следующим радиальным распределением интенсивности:

$$I(\vartheta) = I_0 \left[\frac{2J_1(u)}{u} \right]^2,$$

где $u = ka \sin \vartheta = \frac{2\pi a \sin \vartheta}{\lambda} \approx \frac{2\pi a \vartheta}{\lambda}$. Эта функция имеет главный максимум при $u = 0$ и осциллирует с

ростом u с быстрым уменьшением амплитуды, подобно функции $\left(\frac{\sin u}{u} \right)^2$, описывающей дифракцию на щели. Уже в ближайшем максимуме интенсивность составляет менее 2% от интенсивности центрального максимума, на который приходится 84% проходящего через отверстие светового потока. Поэтому центральный максимум, получивший название *диск Эйри* и имеющий угловой радиус $\vartheta_1 = 0,61 \lambda/a$, можно рассматривать как изображение точечного источника, уширенное дифракцией на круговой диафрагме радиусом a .

Угловые радиусы ϑ_n темных колец равны $0,61 \lambda/a$; $1,12 \lambda/a$; $1,62 \lambda/a$; Расстояние между соседними кольцами с увеличением их номера приближается к $\lambda/2a$. Эффективный размер дифракционной картины и здесь обратно пропорционален размеру отверстия.

Примечание 3. Теория дифракции света дает строгое обоснование геометрической оптике и определяет условия её применимости.

Примечание 4. *Джордж Биддель Эйри, британский математик и астроном, 1801–1892 (член-корреспондент Петербургской академии наук с 1840)*
