

2.6. Дифракционная решетка.

2.6.1. Когерентный вклад N источников.

Дифракционная решетка – совокупность большого числа одинаковых щелей, отстоящих друг от друга на одно и то же расстояние.

Параметры дифракционной решетки: b – размер щели, d – расстояние между щелями или *период решетки*.

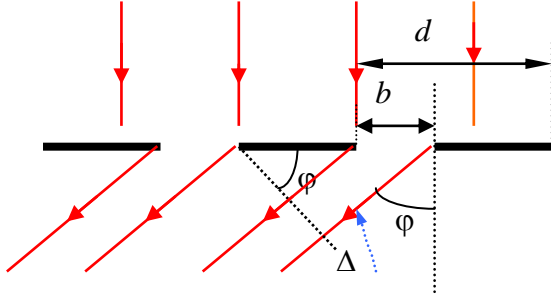


Рис. 6.1.

Для простоты вначале рассмотрим нормальное падение на решетку параллельного пучка света, после прохождения света ставится собирающая линза, которая дает изображение на экране (рис. 6.1).

Каждая щель дает когерентный вклад, если радиус когерентности падающего света значительно больше размеров решетки. Таким образом, имеем N источников света – N щелей, которые дают свой вклад в электрический вектор в точке наблюдения P с амплитудой E_φ от каждой щели. Однако эти вклады сдвинуты по фазе на величину $k\Delta$ (см рис. 6.2) по отношению к соседней щели, т.е.:

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta = \frac{2\pi}{\lambda} d \sin \varphi \quad (2.6.1)$$

Итак, считаем вклад от N источников, отстоящих на расстоянии d и сдвинутых по фазе на δ друг от друга, в точке наблюдения P , находящейся под углом φ . Удобнее для математического вывода суммарного вклада волну записать в экспоненциальной форме. Тогда, если a – амплитуда от одной щели, имеем следующие вклады:

$$\begin{aligned} \text{от 1-го источника} \quad E_1 &= a \exp(i\omega t); \\ \text{от 2-го источника} \quad E_2 &= a \exp(i\omega t + i\delta); \\ \text{от 3-го источника} \quad E_3 &= a \exp(i\omega t + 2i\delta) \\ &\dots\dots\dots \\ \text{от } N\text{-го источника} \quad E_N &= a \exp(i\omega t + (N-1)i\delta). \end{aligned}$$

Результирующее колебание в точке P равно:

$$E = \sum_{m=1}^N E_m = a e^{i\omega t} \sum_{m=1}^N e^{i(m-1)\delta}$$

Воспользовавшись суммой геометрической прогрессии со знаменателем $q = e^{i\delta}$, получаем

$$E = a e^{i\omega t} \frac{1 - e^{iN\delta}}{1 - e^{i\delta}} = A e^{i\omega t} \quad (2.6.2)$$

Здесь мы ввели комплексную амплитуду A :

$$A = a \frac{1 - \exp(iN\delta)}{1 - \exp(i\delta)} = A_0 e^{i\alpha} \quad (2.6.3)$$

где A_0 – обычная амплитуда результирующего колебания, а α – его начальная фаза. Получим обычную амплитуду, исходя из соотношения для комплексных чисел $A \cdot A^* = A_0^2 (e^{i\alpha} \cdot e^{-i\alpha}) = A_0^2$:

$$A_0^2 = a^2 \frac{(1 - \exp(iN\delta))(1 - \exp(-iN\delta))}{(1 - \exp(i\delta))(1 - \exp(-i\delta))} = a^2 \frac{2 - e^{iN\delta} - e^{-iN\delta}}{2 - e^{i\delta} - e^{-i\delta}} = a^2 \frac{1 - \cos N\delta}{1 - \cos \delta} = a^2 \frac{\sin^2 \frac{N\delta}{2}}{\sin^2 \frac{\delta}{2}} \quad (2.6.4)$$

Поскольку интенсивность пропорциональна квадрату амплитуды, то получаем следующее соотношение:

$$I(\varphi) = I_{\varphi} \frac{\sin^2 \frac{N\delta}{2}}{\sin^2 \frac{\delta}{2}} \quad (2.6.5)$$

где I_{φ} – интенсивность света создаваемого одной щелью (см §2.5). Подставляя (2.5.7) и (2.6.1) в (2.6.5), получаем интенсивность света, рассеянного решеткой под углом φ :

$$I(\varphi) = I_0 \frac{\sin^2 \left(\frac{\pi b}{\lambda} \sin \varphi \right)}{\left(\frac{\pi b}{\lambda} \sin \varphi \right)^2} \frac{\sin^2 \left(\frac{N\pi d}{\lambda} \sin \varphi \right)}{\sin^2 \left(\frac{\pi d}{\lambda} \sin \varphi \right)} \quad (2.6.6)$$

Здесь I_0 – интенсивность, создаваемая одной щелью напротив центра линзы ($\varphi = 0$).

2.6.2. Дифракционная картина от дифракционной решетки.

Проанализируем полученное выражение (2.6.6).

1). Первый множитель обращается в 0 в точках, где выполняется условие

$$b \sin \varphi = \pm m \lambda, \quad (2.6.7)$$

как от одной щели ($m = 1, 2, 3, \dots$).

2). Второй множитель принимает максимальное значение при разности фаз $\delta = 2\pi \tilde{m}$ и $\tilde{m} = 0, 1, 2, 3, \dots$, то есть при условии

$$\frac{\pi d}{\lambda} \sin \varphi = \pm \tilde{m} \pi \quad \text{или} \quad d \sin \varphi = \pm \tilde{m} \lambda \quad (2.6.8)$$

В этом легко убедиться, сосчитав следующий предел:

$$\lim_{\delta \rightarrow 2\pi \tilde{m}} \frac{\sin^2 N\delta/2}{\sin^2 \delta/2} = N^2$$

Таким образом, интенсивность в этих максимумах в N^2 раз выше, чем интенсивность от отдельной щели.

$$I = N^2 I_{\varphi} \quad (2.6.9)$$

Максимумы, определяемые условием (2.6.8), называются *главными максимумами* дифракционной решетки, а \tilde{m} – порядок главного максимума. Максимум 0-го порядка ($\tilde{m} = 0$) – один, он находится по центру дифракционной картины ($\varphi = 0$). Остальных максимумов по 2 штуки.

3). Кроме минимумов, определяемых (2.6.7) одной щелью, имеются дополнительные минимумы в промежутках между соседними главными максимумами:

$$\sin \left(\frac{N\pi d}{\lambda} \sin \varphi \right) = 0 \quad \text{или} \quad \frac{N\pi d}{\lambda} \sin \varphi = n\pi$$

кроме точек, где $\frac{\pi d}{\lambda} \sin \varphi = \tilde{m} \pi$. Тогда получаем условие появления дополнительных минимумов:

$$d \sin \varphi = \pm \frac{n}{N} \lambda, \quad (n = 1, 2, 3, \dots, N-1, N+1, \dots) \quad (2.6.10)$$

(кроме $n = N, 2N, 3N, \dots$).

Построим график интенсивности при условии, которое является обычным для дифракционной решетки, а именно, что $d/b > 1$. При этом происходит наложение главных максимумов и дополнительных минимумов на картинку от одной щели. Количество наблюдаемых главных максимумов определяется из условия:

$$\sin \varphi = \frac{\tilde{m} \lambda}{d} \leq 1 \quad \text{или} \quad \tilde{m} \leq \frac{d}{\lambda} \quad (2.6.11)$$

Вклад от одной щели очень мал по сравнению с максимумами, получаемыми от дифракционной решетки. Поэтому на рис. 6.3 для сравнения вклад от одной щели умножен на множитель N^2 . Из рис. 6.3 видно как главные максимумы различных порядков \tilde{m} модулируются кривой интенсивности от одной щели.

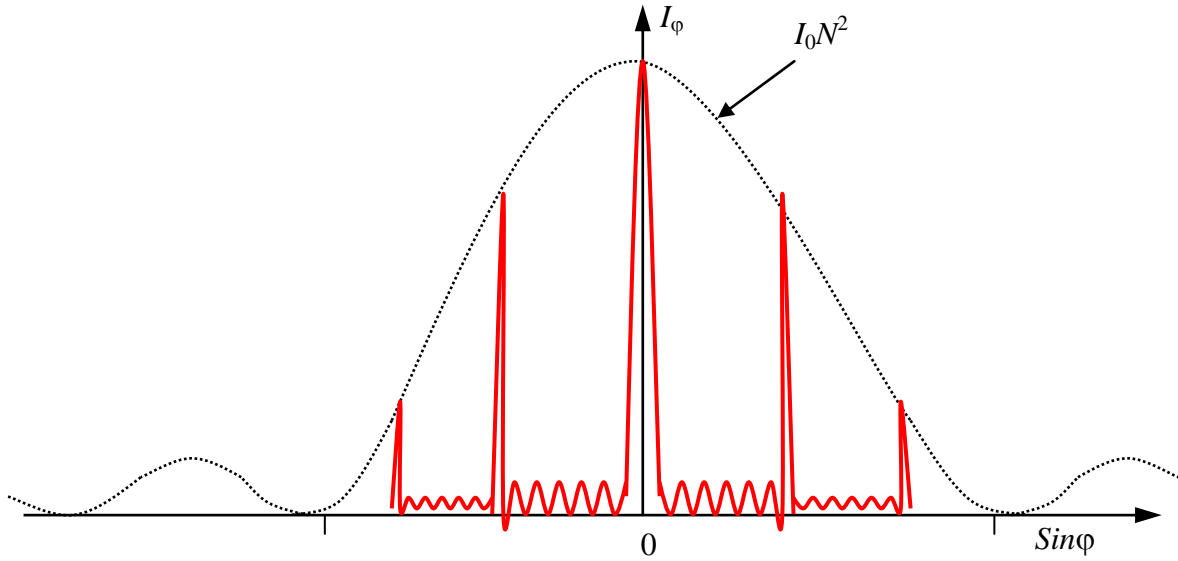


Рис. 6.3.

Следует отметить, что иногда выгодно использовать наклонное падение света на дифракционную решетку. Для случая наклонного падения света на решетку под углом φ_0 разность хода лучей от соседних щелей равна:

$$\Delta = \Delta_1 - \Delta_2 = d(\text{Sin}\varphi_0 - \text{Sin}\varphi)$$

Тогда условие появления главных дифракционных максимумов записывается:

$$d(\text{Sin}\varphi_0 - \text{Sin}\varphi) = \pm \tilde{m}\lambda \quad (2.6.12)$$

Максимум нулевого порядка виден под углом φ_0 , однако количество наблюдаемых порядков будет различно по обеим сторонам от положения главного максимума нулевого порядка.

2.6.3. Дифракционная решетка как спектральный прибор.

Положение главных максимумов зависит от длины волны падающего света λ . Если падает белый свет, то все максимумы (кроме нулевого порядка) окрашены, т.е. наблюдается *разложение белого света в спектр*. Причем с более короткими длинами волн (фиолетовый) свет в главных максимумах концентрируется ближе к центру, а с более длинными длинами (красный) – наружу. Таким образом, дифракционная решетка рассматривается как *спектральный прибор*.

Рассмотрим некоторые характеристики решетки как спектрального прибора.

1). **Угловая дисперсия.** *Угловая дисперсия* определяет угловое расстояние между двумя спектральными линиями, отличающимися на единицу длины волны λ .

$$D = \frac{\delta\varphi}{\delta\lambda} \quad (2.6.13)$$

Из условия появления главного максимума (2.6.8) получаем выражение для угловой дисперсии:

$$d\text{Cos}\varphi \cdot \delta\varphi = \tilde{m}\delta\lambda$$

$$D = \frac{\tilde{m}}{d\text{Cos}\varphi} \quad (2.6.14)$$

Из (2.6.14) с очевидностью получаем следующие выводы:

- а) чем выше порядок спектра \tilde{m} , тем выше D ;
- б) чем меньше d , тем выше D ;
- в) для увеличения D выгодно скользкое падение.

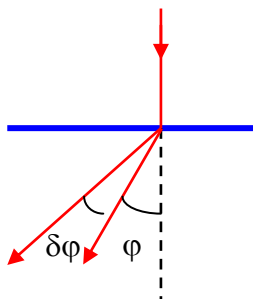


Рис. 6.4.

2). **Дисперсионная область.** Если спектры соседних порядков перекрываются, то спектральный аппарат становится непригодным. Максимальная ширина спектрального интервала $\Delta\lambda$, при которой нет перекрытия, называется *дисперсионной областью* спектрального аппарата. Пусть диапазон длины волны от

λ до $\lambda' = \lambda + \Delta\lambda$. Тогда пишем условия перекрытия, когда правый конец спектра $(\tilde{m} + 1)$ -го порядка для длины волны λ , совпадает с левым концом \tilde{m} -го порядка для λ' :

$$d \sin \varphi = \tilde{m} \lambda'$$

$$d \sin \varphi = (\tilde{m} + 1) \lambda$$

Приравнявая, получаем соотношение $\tilde{m} \lambda' = (\tilde{m} + 1) \lambda$ и отсюда дисперсионную область:

$$\Delta \lambda = \lambda' - \lambda = \frac{\lambda}{\tilde{m}} \quad (2.6.15)$$

3). **Разрешающая способность.** Наименьшая разность длин волн двух спектральных линий $\delta\lambda$, при которой спектральный аппарат разрешает эти линии, называется спектральным разрешаемым расстоянием, а величина

$$R = \frac{\lambda}{\delta\lambda} \quad (2.6.16)$$

называется *разрешающей способностью* аппарата.

Дж. Рэлей для дифракционной решетки предложил критерий спектрального разрешения. Линии с длинами волн λ и λ' считаются разрешенными, если главный максимум дифракционной картины для одной длины волны совпадает по своему положению с 1-ым дифракционным минимумом в том же порядке для другой длины волны. Так, для наклонного падения из (2.6.12) имеем:

$$d(\sin \varphi - \sin \varphi_0) = \left(\tilde{m} + \frac{1}{N} \right) \lambda$$

$$d(\sin \varphi - \sin \varphi_0) = \tilde{m} \lambda'$$

Отсюда, приравнявая, получаем

$$\left(\tilde{m} + \frac{1}{N} \right) \lambda = \tilde{m} \lambda' \quad \text{и далее}$$

$$\delta\lambda \equiv \lambda' - \lambda = \frac{\lambda}{\tilde{m}N} \quad (2.6.17)$$

Разрешающая способность аппарата определяется через произведение порядка спектра и числа щелей в решетке:

$$R = \frac{\lambda}{\delta\lambda} = \tilde{m}N \quad (2.6.18)$$

На примере, изображенном на рис. 6.5, видно, что при одинаковой угловой дисперсии D , но при разных разрешающих способностях R , имеем следующие изменения в спектре: 2 линии спектра, близкие по частоте, могут быть разделены при использовании аппарата с большей разрешающей способностью.

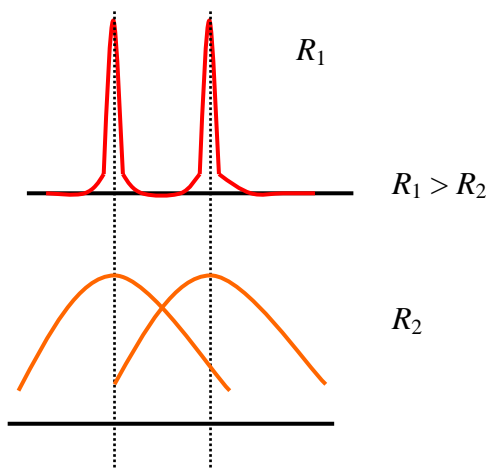


Рис. 6.5.

Примечание 1. Джон Уильям Рэлей, английский физик, 1842–1919, Нобелевская премия 1904 г. за открытие аргона
