

3.4. Элементы оптики проводящих сред.

3.4.1. Телеграфные уравнения.

Уравнения Максвелла, описывающие распространение электромагнитных волн в проводящих средах (металлах), по сравнению с соответствующими уравнениями в диэлектриках включают теперь проводимость σ :

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{H} &= \frac{4\pi}{c} \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{c \partial t}, & \operatorname{div} \vec{B} &= 0, \\ \operatorname{rot} \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{c \partial t}, & \operatorname{div} \vec{D} &= 4\pi \rho \end{aligned} \quad \begin{cases} \vec{D} = \varepsilon \vec{E}, \\ \vec{B} = \mu \vec{H}, \\ \vec{j} = \sigma \vec{E} \end{cases} \quad (3.4.1)$$

Эти уравнения написаны для случая изотропных металлов. В металлах имеются свободные и связанные электроны. Первые колеблются под воздействием электромагнитной волны и обеспечивают поглощение излучения вследствие возбуждения тока (плотности тока \vec{j}), при этом колебания электронов происходят в фазе с колебаниями векторов внешнего поля. Связанные электроны колеблются со сдвигом фазы на $\pi/2$ и не дают вклада в поглощение (при условии, если частота электромагнитных волн не слишком велика).

В §3.1 Главы 3 (Электромагнетизм) было показано, что если в металлах появляется избыточный заряд, или даже электрическое поле, отличное от нуля, то он исчезает за так называемое Максвелловское время релаксации. Это время, за которое плотность заряда или амплитуда электрического поля падает в e раз и которое может быть записано в виде:

$$\tau = \frac{\varepsilon}{4\pi\sigma} \quad (3.4.2)$$

Ранее в §3.1 Главы 3 мы не рассматривали диэлектрическую постоянную ε среды. Однако теперь она появилась в выражении для времени релаксации из-за связи вектора электрической индукции и напряженности $\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$.

Вспомним также, что проводимость может быть выражена через подвижность носителей заряда $\mu_{\text{под}}$: $\sigma = n l \mu_{\text{под}}$. Для типичных металлов в системе СИ имеем $\sigma \approx 10^4 - 10^6$ См/м (Сименс/метр), а время релаксации в системе СИ записывается как $\tau = \varepsilon_0 \varepsilon / \sigma_R$ (здесь и далее $\sigma \equiv \sigma_R$), а тогда переходя в систему единиц Гаусса $\varepsilon_0 \approx 1/(4\pi k) \approx 1/(4\pi \cdot 9 \cdot 10^9) \approx 10^{-11}$ (Ф/м) (см формулу(1.2.2)), имеем:

$$\tau \approx \frac{10^{-11}}{10^4} \sim 10^{-15} \text{ с}$$

Следовательно, в типичных металлах время существования электромагнитного поля порядка периода волны в оптическом диапазоне. Значит, глубина проникновения электромагнитной волны в оптическом диапазоне составляет величину

$$cT \sim (10^{-4} - 10^{-5}) \text{ см.}$$

Это так называемый *скин-эффект*. Надо отметить, что глубина скин-слоя существенно зависит от частоты (через проводимость) падающего света и состояния поверхности.

Уравнение, подобное волновому, для электромагнитного поля в проводящих средах получается из системы уравнений Максвелла (3.4.1) аналогичным путем как в диэлектриках. Полагаем плотность сторонних зарядов $\rho = 0$ (т.е. $\operatorname{div} \vec{E} = 0$) и подействуем оператором rot на уравнение, описывающее закон электромагнитной индукции, воспользовавшись опять векторным тождеством для левой части уравнения:

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{E} \equiv [\nabla[\nabla, \vec{E}]] = \nabla(\nabla, \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E} = -\operatorname{rot} \frac{\partial \vec{B}}{c \partial t} \quad (3.4.3)$$

Воспользуемся сначала, что $\operatorname{div} \vec{E} = 0$, а затем преобразуем правую часть уравнения, учитывая, что ε, μ не зависят от координат для однородной среды и что $\vec{j} = \sigma \vec{E}$:

$$-\nabla^2 \vec{E} = -\frac{\mu \partial}{c \partial t} \operatorname{rot} \vec{H} = -\frac{\mu \partial}{c \partial t} \left(\frac{4\pi}{c} \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{c \partial t} \right) = -\frac{4\pi \sigma \mu}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \frac{\varepsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \quad (3.4.4)$$

В результате получаем уравнения, описывающие распространение электромагнитных волн в проводящих средах и называемых иногда *телеграфными*:

$$\begin{cases} \nabla^2 \vec{E} = \frac{\epsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} + \frac{4\pi\sigma\mu}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \\ \nabla^2 \vec{H} = \frac{\epsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} + \frac{4\pi\sigma\mu}{c^2} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \end{cases} \quad (3.4.5)$$

Если проводимость сред равна нулю, то телеграфные уравнения переходят в обычные волновые уравнения для изотропной диэлектрической среды.

3.4.2. Основные особенности решений телеграфных уравнений.

Основное отличие полученных уравнений (3.4.5) от волновых уравнений состоит в дополнительных слагаемых в правой части. Присутствие членов с первыми производными по времени означает *наличие затухания электромагнитной волны* (вспомним уравнение, описывающее затухающие колебания, в которое входит первая производная по времени).

Телеграфные уравнения не совпадают с волновыми уравнениями, поэтому обычные плоские волны не являются их решениями. Однако уравнения (3.4.5) можно привести к волновым уравнениям обычного типа для гармонической волны, вводя комплексную диэлектрическую проницаемость.

Рассмотрим гармоническую волну:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \exp[i(\omega t - \vec{k}\vec{r})] \quad (3.4.6)$$

Тогда можно вместо первой производной по времени в уравнении (3.4.5) ввести величину $\partial \vec{E} / \partial t = i\omega \vec{E}$, т.е. записать

$$\frac{4\pi\sigma\mu}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = -i \frac{4\pi\sigma\mu}{\omega c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}.$$

Введем *комплексную диэлектрическую проницаемость*:

$$\epsilon^* = \epsilon - i \frac{4\pi\sigma}{\omega} \quad (3.4.7)$$

При этом телеграфные уравнения принимают вид обычных волновых уравнений:

$$\begin{cases} \nabla^2 \vec{E} = \frac{\epsilon^* \mu}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \\ \nabla^2 \vec{H} = \frac{\epsilon^* \mu}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} \end{cases} \quad (3.4.8)$$

Рассмотрим комплексный показатель преломления:

$$\epsilon^* = (n^*)^2 = (n - i\eta)^2 = \epsilon - i \frac{4\pi\sigma}{\omega}, \quad (3.4.9)$$

где n – *главный показатель преломления*, а η – *главный показатель поглощения*.

Примечание 1. Иногда в некоторых учебниках вводят другое обозначение для диэлектрической проницаемости: $\epsilon = \epsilon' - i\epsilon''$.

Можно также ввести *комплексное волновое число*

$$\tilde{k}^2 = \frac{\omega^2}{c^2} (\epsilon^*) = \frac{\omega^2}{c^2} \left(\epsilon - i \frac{4\pi\sigma}{\omega} \right) \quad (3.4.10)$$

Вводя комплексный показатель преломления n^* и комплексную диэлектрическую проницаемость ϵ^* , любые следствия и соотношения оптики прозрачных сред могут быть формально перенесены в оптику металлов и других поглощающих сред путем простой замены ϵ на комплексную величину ϵ^* . Найдем связь между n , η и измеряемыми величинами ϵ и σ :

$$n^2 - 2in\eta - \eta^2 = \epsilon - i \frac{4\pi\sigma}{\omega}$$

Откуда приравняв реальные и мнимые части, получаем:

$$\begin{cases} n^2 - \eta^2 = \varepsilon \\ n\eta = \frac{2\pi\sigma}{\omega} = \frac{\sigma}{\nu} \end{cases} \quad (3.4.11)$$

Здесь мы помимо круговой частоты ω ввели обычную частоту ν . Решая эту систему относительно n и η (в промежутке $n^4 - \varepsilon n^2 - (\sigma/\nu)^2 = 0$), получаем:

$$\begin{cases} n^2 = \frac{1}{2} \left(\varepsilon \pm \sqrt{\varepsilon^2 + 4 \left(\frac{\sigma}{\nu} \right)^2} \right) \\ \eta^2 = \frac{1}{2} \left(-\varepsilon \pm \sqrt{\varepsilon^2 + 4 \left(\frac{\sigma}{\nu} \right)^2} \right) \end{cases} \quad (3.4.12)$$

Здесь σ – высокочастотная проводимость, включающая не только перемещение свободных электронов, но также и связанных (т.е. учитывает явление поляризации). Различие между металлами и неметаллами состоит в том, что в проводниках поглощают свободные электроны.

Примечание 2. Вообще говоря, показатель преломления металлов n зависит от угла падения электромагнитной волны $n_{\theta_1} = \text{Sin}\theta_1 / \text{Sin}\theta_2$. Поэтому то, что мы получили, строго говоря, относится к нормальному падению света.

3.4.3. Пройденная и отраженная волны.

Рассмотрим простейшие решения телеграфных уравнений. Пусть имеем нормальное падение света – падает плоская монохроматическая волна по оси z из вакуума на поверхность металла. Пусть колебания вектора \vec{E} происходят вдоль оси x . Общее выражение для плоской волны

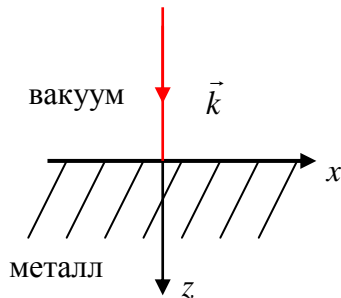


Рис. 4.1.

$$E = E_{x0} \exp[i(\omega t - kz)] = E_{x0} e^{i\omega \left(t - \frac{nz}{c} \right)} \quad (3.4.13)$$

Теперь подставим вместо $n \rightarrow n^*$:

$$\begin{aligned} E &= E_{x0} \exp \left[i\omega \left(t - \frac{z}{c} (n - i\eta) \right) \right] = \\ &= E_{x0} \exp \left[-\frac{\omega\eta}{c} z \right] \exp \left[i\omega \left(t - \frac{z}{c} n \right) \right] \end{aligned} \quad (3.4.14)$$

Последнее выражение описывает электромагнитную волну с затухающей амплитудой (затухающая волна):

$$E(z) = E_0 \exp \left(-\frac{\omega\eta}{c} z \right) \quad (3.4.15)$$

Интенсивность волны, прошедшей в среду, как функцию координаты z можно получить, записав сначала долю интенсивности, потерянную на расстоянии dz (см рис. 4.2):

$$dI = -\alpha I dz$$

Здесь α – коэффициент поглощения (размерность – $1/\text{см}$). Откуда, получаем интенсивность волны как функцию пройденного расстояния:

$$I = I_0 e^{-\alpha z} \quad (3.4.16)$$

Поскольку интенсивность пропорциональна квадрату амплитуды, то возводя уравнение (3.4.15) в квадрат и сравнивая с (3.4.16), получаем выражение для коэффициента поглощения:

$$\alpha = \frac{2\omega\eta}{c} \quad (3.4.17)$$

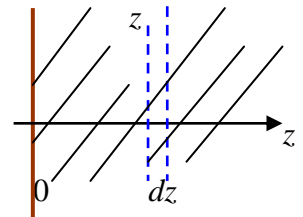


Рис. 4.2.

Закон Снеллиуса следует из граничных условий для электрической и магнитной составляющих полей, поэтому он должен выполняться для любых показателей преломления, включая комплексные n :

$$\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2} = n^* \quad (3.4.18)$$

где показатель определяется из (3.4.9) $n^* = n - i\eta$. То есть углы преломления тоже будут комплексными при любом угле падения θ_1 (а не только при $\theta_1 \geq \theta_0$ как полном внутреннем отражении). Наличие комплексного угла θ_2 приводит к тому, что амплитуды отраженного и преломленного света комплексные.

Таким образом, если падающий свет линейно поляризован, то и отраженная и преломленная волны – эллиптически поляризованы. Исследование преломленной волны в металлах довольно сложно. Поэтому обычно исследуют отраженную волну, и такой способ является основным методом исследования оптических характеристик металла. Как и ранее, можно пользоваться формулами Френеля для амплитуд (3.2.16):

$$r_{\parallel} = \frac{\operatorname{tg}(\theta_1 - \theta_2)}{\operatorname{tg}(\theta_1 + \theta_2)} = \rho_1 e^{i\delta_{\parallel}} \quad \text{и} \quad r_{\perp} = -\frac{\sin(\theta_1 - \theta_2)}{\sin(\theta_1 + \theta_2)} = \rho_2 e^{i\delta_{\perp}} \quad (3.4.19)$$

В общем случае $\delta_{\parallel} \neq \delta_{\perp}$ и получаем эллиптическую поляризацию. Вычисление разности фаз ($\delta_{\parallel} - \delta_{\perp}$) происходит таким же способом как в случае полного внутреннего отражения.

Для нормального падения $\theta_1 = 0$, и тогда коэффициенты одинаковы и равны:

$$r = \frac{n^* - 1}{n^* + 1} = \frac{n - i\eta - 1}{n - i\eta + 1} \quad (3.4.20)$$

Энергетические коэффициенты отражения получаем равными:

$$R = |r|^2 = \frac{(n-1)^2 + \eta^2}{(n+1)^2 + \eta^2} \quad (3.4.21)$$

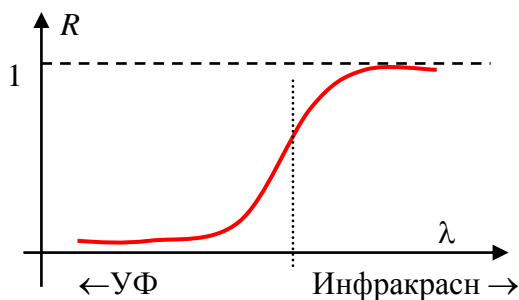


Рис. 4.3.

Если проводимость металлов большая $\sigma \rightarrow \infty$, то компоненты показателя преломления также велики $n \rightarrow \infty$ и $\eta \rightarrow \infty$, и тогда из (3.4.21) следует, что коэффициент отражения стремится к единице $R \Rightarrow 1$, т.е. для идеального проводника вся энергия отражается.

Реально коэффициент отражения зависит от длины волны электромагнитного излучения. Например, для серебра Ag примерная зависимость изображена на рис. 4.3. Пауль Друде развил методику определения оптических постоянных металлов путем изучения их свойств по отражению света. В таблице представлены оптические константы для длины волны $\lambda = 5893 \text{ \AA}$.

Металл	η	n	R (%)
Натрий	2.61	0.05	99.8
Серебро	3.64	0.18	95.0
Золото	2.82	0.37	85.1
Никель	3.32	1.79	62.0
Железо	1.63	1.51	32.6

Сравнение данных этой таблицы, точнее пересчитанные из нее значения электропроводности σ_{ω} , как правило, не совпадают с измеренными значениями электропроводности σ_0 на постоянном токе $\sigma_0 \neq \sigma_{\omega}$. Это объясняется влиянием связанных электронов. По мере уменьшения частоты $\sigma_{\omega} \rightarrow \sigma_0$.

Примечание 3. Пауль Карл Людвиг Друде, немецкий физик, 1863–1906
