

3.6. Классическая теория дисперсии света

3.6.1. Дисперсия.

Дисперсия – зависимость показателя преломления n и, следовательно, скорости распространения электромагнитных волн v от длины волны. Влияние дисперсии проявляется лишь в распространении немонохроматических волн. Дисперсия является следствием зависимости поляризуемости атомов и молекул от частоты падающего излучения.

Ранее мы получали формулу Релея (см Главу 1, § 1.8, (1.8.9)), дающую связь между групповой и фазовой скоростями:

$$v_{gp} = v - \lambda \frac{dv}{d\lambda}, \quad (3.6.1)$$

где фазовая скорость равна $v = \omega/k = c/n$, а групповая – $v_{gp} = d\omega/dk$.

1) Если $\frac{dv}{d\lambda} = 0$, то $v_{gp} = v$ и в среде нет дисперсии.

2) Если $\frac{dv}{d\lambda} > 0$, то $v_{gp} < v$, при этом $\frac{\partial v}{\partial \lambda} = -\frac{c}{n^2} \frac{\partial n}{\partial \lambda}$ и $\frac{\partial n}{\partial \lambda} < 0$. Это *нормальная дисперсия*: с ростом длины волны показатель преломления уменьшается. Примерная зависимость показателя преломления от длины волны и частоты ω изображена на рис. 6.1 (а,б).

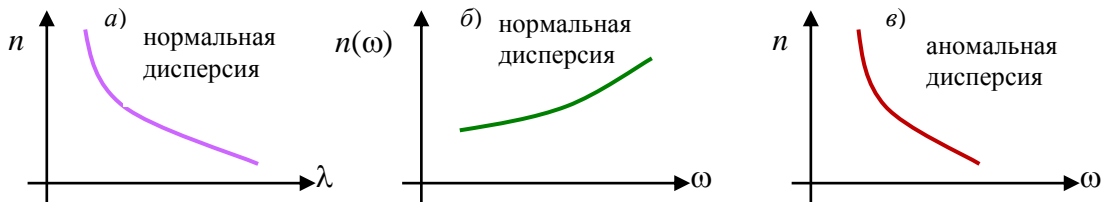


Рис. 6.1.

3) Если $\frac{dv}{d\lambda} < 0$, то $v_{gp} > v$, и $\frac{\partial n}{\partial \lambda} > 0$ – это *аномальная дисперсия*. При этом с ростом длины волны показатель преломления растет или с ростом частоты падает (рис. 6.1 в).

Все среды, за исключением абсолютного вакуума, обладают дисперсией. Даже в межзвездном пространстве обнаружена дисперсия.

Теория Максвелла не содержит атомных констант и не дает объяснения дисперсии, т.е. она не дает зависимости диэлектрической проницаемости от длины волны $\epsilon = \epsilon(\lambda)$. Дисперсия света возникает в результате *вынужденных колебаний электронов и ионов* под воздействием переменного поля электромагнитной волны. Поэтому для объяснения дисперсии необходимо в модель ввести представления о структуре атомов или молекул.

3.6.2. Классическая теория дисперсии.

Рассмотрим классическую теорию дисперсии, построенную Лоренцом Х.А. на основании уравнений Ньютона. Она справедлива в основном для газовых сред, где можно не учитывать сложное взаимодействие между атомами и электронами.

В простейшем случае, когда взаимодействием между атомами или молекулами можно пренебречь (разреженные среды, например, газы) и считать, что поле, действующее на отдельный атом, совпадает со средним полем волны. При этом достаточно учесть действие поля волны на изолированный атом, который упрощенно в этой модели рассматривается как гармонический осциллятор (т.е. рассматриваются упруго связанные электроны).

Очевидно, что применение к описанию движения электрона законов классической физики с точки зрения современной физики совершенно не оправдано. Правильную теорию атома дает квантовая механика. Поэтому и последовательная теория дисперсии, использующая реалистическую модель среды, должна быть

квантовой. Использование здесь упрощенной модели атома как гармонического осциллятора основано лишь на том замечательном факте, что квантовая теория дисперсии приводит к практически тем же результатам, что и классическая, хотя и с некоторыми особенностями.

Все электроны в атоме можно разделить на *внешние* (оптические) и *внутренние* электроны, т.е. электроны внутренних оболочек. Для разных длин волн разные электроны дают вклад в дисперсию. В оптическом диапазоне вклад дают только внешние электроны. В классической теории дисперсии оптический электрон (электрон внешней оболочки атома) в атоме рассматривается как затухающий гармонический осциллятор, характеризуемый определенной собственной частотой ω_0 и постоянной затухания γ . Запишем уравнение Ньютона, для движения электрона в поле электромагнитной волны, пренебрегая магнитной силой Лоренца $\frac{e}{c}[\vec{v}, \vec{H}]$:

$$m\ddot{\vec{r}} = -k\vec{r} - g\dot{\vec{r}} + e\vec{E}' \quad (3.6.2)$$

Здесь \vec{r} – смещение электрона из положения равновесия, “ $-k\vec{r}$ ” – квазиупругая сила; “ $g\dot{\vec{r}}$ ” – аналог силы трения (учитывает, что свет может поглощаться); \vec{E}' – напряженность электрического поля, действующего на электрон. Вообще говоря, поле \vec{E}' отличается от среднего макроскопического поля \vec{E} , входящего в уравнения Максвелла, однако в случае достаточно разреженных газов этим различием можно пренебречь. Тогда уравнение движения оптического электрона в поле $\vec{E}(t)$ световой волны имеет вид

$$\ddot{\vec{r}} + 2\gamma\dot{\vec{r}} + \omega_0^2\vec{r} = \frac{e}{m}\vec{E}(t), \quad (3.6.3)$$

где входящие параметры определены как обычно в теории колебаний:

$$2\gamma = \frac{g}{m}, \quad \omega_0^2 = \frac{k}{m} \quad (3.6.4)$$

Постоянная затухания γ , характеризующая силу “сопротивления”, пропорциональную скорости электрона, содержит вклад, обусловленный *радиационным затуханием*: согласно классической теории электрон обязательно излучает. Другие причины затухания (взаимодействие с другими атомами и неупругие соударения) связаны с *диссипацией* энергии электромагнитного поля, т.е. в конечном итоге превращением её в теплоту. Диссипативное затухание можно считать истинным поглощением и включить его вклад в константу γ . Относительная роль отдельных членов уравнения зависит от рассматриваемой области частот.

Например, при частотах ω падающей электромагнитной волны, далеких от собственной частоты ω_0 осциллятора, затуханием, как правило, можно пренебречь. Собственную частоту ω_0 атомного электрона будем рассматривать как формально введенную постоянную, которая определяет частоту линии поглощения в спектре исследуемого вещества. Эти постоянные γ и ω_0 не могут быть получены из классической физики, здесь они вводятся как параметры.

Пусть падает плоская монохроматическая волна, т.е. поле $\vec{E}(t)$, действующее на осциллятор, изменяется со временем по гармоническому закону. Запишем падающую волну в комплексной форме:

$$\vec{E}(t) = \vec{E}_0(\vec{r})e^{i\omega t} = \vec{E}_0 e^{i(\omega t - \vec{k}\vec{r})}. \quad (3.6.5)$$

Заметим, E_0 можно считать постоянной (т.е. не зависящей от координат), если амплитуда колебаний электрона мала по сравнению с длиной волны. Нас интересует частное решение уравнения (3.6.3), описывающее *установившиеся* вынужденные колебания осциллятора (напомним, при больших временах общее решение однородного уравнения исчезает – см Главу “Колебания” в курсе Классической механики). Эти колебания, совершаемые под действием гармонической (синусоидальной) силы, также будут гармоническими, а их частота совпадает с частотой вынуждающей силы. Поэтому решение уравнения для смещения $\vec{r}(t)$ будем искать в виде $\vec{r}(t) = \vec{r}_0 e^{i\omega t}$.

В результате получаем решение:

$$\vec{r}(t) = \frac{e/m}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\omega\gamma} \vec{E}(t). \quad (3.6.6)$$

Так как электрон смещается относительно ядра, то атом приобретает дипольный момент. Индуцируемый электрическим полем дипольный момент атома пропорционален напряженности поля $\vec{p}(t) = e\vec{r} = \beta\vec{E}$ и, следовательно, можно записать:

$$\vec{p}(t) = \beta\vec{E} = \frac{e^2/m}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\omega\gamma} \vec{E}(t). \quad (3.6.7)$$

Зависящий от частоты ω коэффициент пропорциональности между векторами \vec{p} и \vec{E} называется *атомной поляризуемостью* $\beta(\omega)$:

$$\vec{p} = \beta(\omega)\vec{E}.$$

Если N — концентрация атомов вещества, то вектор поляризации равен $\vec{P} = N\vec{p}$, тогда для *восприимчивости* можно записать

$$\alpha(\omega) = N\beta(\omega) = \frac{N e^2/m}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\omega\gamma}. \quad (3.6.8)$$

Диэлектрическая проницаемость связана с восприимчивостью соотношением $\varepsilon = 1 + 4\pi\alpha$. Таким образом, для разреженной среды, содержащей N осцилляторов в 1 см^3 , получаем *диэлектрическую проницаемость как функцию частоты*:

$$\varepsilon(\omega) = 1 + \frac{4\pi N e^2/m}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\omega\gamma}. \quad (3.6.9)$$

Иногда для упрощения записи вводят константу ω_p , имеющую размерность частоты и называемую *плазменной* или *Ленгмюровской частотой*

$$\omega_p^2 = \frac{4\pi N e^2}{m}. \quad (3.6.10)$$

Тогда диэлектрическую проницаемость можно записать в виде

$$\varepsilon(\omega) = 1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\omega\gamma}. \quad (3.6.11)$$

Вследствие затухания атомных осцилляторов диэлектрическая проницаемость оказывается комплексной величиной. Выделяя вещественную и мнимую часть, можно получить выражения для зависящих от частоты показателя преломления $n(\omega)$ и показателя затухания $\eta(\omega)$. Вводим, как и ранее в §3.4 эти показатели:

$$\sqrt{\varepsilon(\omega)} = n - i\eta \quad (3.6.12)$$

Тогда, подставив (3.6.12) в (3.6.11) и приравняв отдельно реальные и мнимые части, получаем систему уравнений:

$$\begin{aligned} n^2 - \eta^2 &= 1 + \frac{\omega_p^2(\omega_0^2 - \omega^2)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2\gamma^2} \\ n\eta &= \frac{\omega_p^2\omega\gamma}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2\gamma^2} \end{aligned} \quad (3.6.13)$$

Отсюда можно получить показателя преломления и затухания, однако, в общем виде выражения для показателей преломления $n(\omega)$ и затухания $\eta(\omega)$ весьма громоздки, поэтому анализ физических

результатов электронной теории дисперсии имеет смысл провести для сравнительно простых частных случаев.

*Примечание 1. Хенрик Антон Лоренц, нидерландский физик-теоретик, 1853–1928, Нобелевская премия 1902 г. за разработку теории эффекта Зеемана;
Ирвинг Ленгмюр, американский физик, 1881–1957, Нобелевская премия 1932 г. по химии.*

3.6.3. Нормальная и аномальная дисперсии.

Нормальная дисперсия. При частотах, далеких от собственной частоты ω_0 атомных осцилляторов, выполняется условие

$$2\omega\gamma \ll \left| \omega_0^2 - \omega^2 \right|, \quad (3.6.14)$$

поэтому мнимой частью, ответственной за поглощение, в выражении для дисперсии можно пренебречь. Тогда зависимость показателя преломления от частоты принимает вид:

$$n^2(\omega) = \varepsilon(\omega) = 1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2}. \quad (3.6.15)$$

Для разреженных сред второй член этого выражения мал по сравнению с первым, поэтому можем приближенно записать (вспомогая разложение в ряд $\sqrt{1+x} \approx 1 + x/2$ при $x \ll 1$):

$$n(\omega) \approx 1 + \frac{2\pi Ne^2}{m} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2}. \quad (3.6.16)$$

При тех частотах, где полученная формула применима (т.е. частотах не вблизи ω_0), показатель преломления возрастает с увеличением частоты. Такой характер зависимости $n(\omega)$ называют *нормальной дисперсией*. На рисунке 6.2 показана зависимость $n(\omega) - 1$ от частоты электромагнитной волны.

Для низких частот ($\omega < \omega_0$) показатель преломления больше единицы, т.е. фазовая скорость c/n волны в среде меньше скорости света в пустоте. Это значит, что измененная средой волна отстает от падающей волны по фазе.

Если же частота света больше собственной частоты осцилляторов ($\omega > \omega_0$), то $n < 1$ и фазовая скорость волны в среде оказывается больше скорости света в вакууме, т.е. измененная волна опережает по фазе падающую. Напомним, что фазовая скорость может быть больше скорости света, и это не противоречит релятивистской теории, утверждающей, что скорость материальных тел и скорость сигнала не могут превышать c . Понятие показателя преломления применимо к *монохроматической волне*, имеющей бесконечную протяженность в пространстве и во времени, т.е. к установившимся вынужденным колебаниям осцилляторов среды. А монохроматическая волна не может служить для передачи сигнала.

На рисунке 6.2 показана зависимость (3.6.16), однако надо иметь в виду, что область частот около собственной частоты колебаний $\omega \approx \omega_0$ здесь схвачена неверно. Зависимость показателя преломления от частоты была получена для разреженной среды, т.е. предполагалось, что действующее на отдельный атом поле совпадает со средним макроскопическим полем \vec{E} . В плотном веществе (жидкости, твердые тела) это предположение несправедливо.

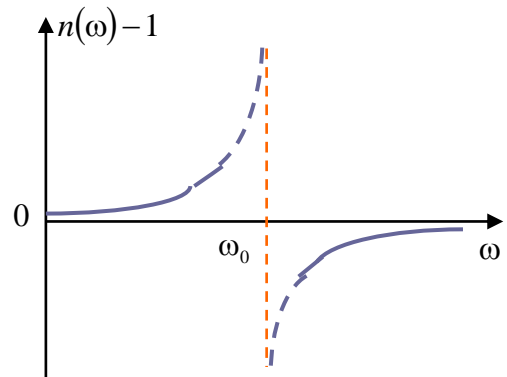


Рис. 6.2.

Аномальная дисперсия. Обратимся опять к выражению (3.6.9), описывающему диэлектрическую проницаемость разреженной среды, и исследуем на его основе дисперсию *вблизи собственной частоты* ω_0 атомного осциллятора. В этом случае диэлектрическая проницаемость среды $\varepsilon(\omega)$ и показатель преломления $\sqrt{\varepsilon(\omega)} = n - i\eta$ являются комплексными величинами.

Найдем вещественную n и мнимую η части показателя преломления из выражений (3.6.13). При частотах, близких к собственной частоте осциллятора в полученных выражениях возможны упрощения. При частотах $\omega \approx \omega_0$ везде, кроме разности $\omega_0^2 - \omega^2$, можно заменить ω на ω_0 , а разность квадратов частот можно преобразовать следующим образом:

$$\omega_0^2 - \omega^2 = (\omega_0 + \omega)(\omega_0 - \omega) \approx 2\omega_0 \Delta\omega,$$

где $\Delta\omega = \omega_0 - \omega$. Теперь получаем из (3.6.13):

$$n^2 - \eta^2 \approx 1 + \frac{\omega_p^2}{2\omega_0} \frac{\Delta\omega}{(\Delta\omega)^2 + \gamma^2}$$

и

$$n\eta \approx \frac{\omega_p^2}{4\omega_0} \frac{\gamma}{(\Delta\omega)^2 + \gamma^2}. \quad (3.6.17)$$

Зависимости $n(\omega) - 1$ и $\eta(\omega)$ от частоты в окрестности $\omega \approx \omega_0$ представлены на рисунке 6.3.

Зависимость показателя затухания от частоты характеризует *спектральный контур линии поглощения*. В рассматриваемой модели среды (система неподвижных затухающих атомных осцилляторов) этот контур имеет *лоренцевскую* форму с максимумом при $\Delta\omega \approx 0$, т.е. при $\omega \approx \omega_0$. Ширина максимума на половине высоты равна 2γ и растет с увеличением постоянной затухания.

Уменьшение показателя преломления с частотой, которое происходит в пределах ширины спектрального контура линии поглощения, называют *аномальной дисперсией*. Экспериментально она была открыта Ф.Леру в 1860 г. в опытах по преломлению белого света призмой, наполненной парами йода. Оказалось, что синие лучи преломляются меньше красных, т.е. показатель преломления убывает с частотой.

При получении (3.6.17) и на графике рис. 6.3 использовалось примерное равенство $\omega \approx \omega_0$, хотя, строго говоря, резонансная частота $\omega_{рез}$ отличается от ω_0 . Сдвиг резонансной частоты от ω_0 происходит при наличии затухания и вынуждающей силы – см главу Колебания в Классической механике. Поэтому максимум в показателе затухания происходит примерно при частоте ω_0 только при небольших значениях постоянной затухания γ .

Если в атомах имеются другие электроны с другими собственными частотами ω_k , то диэлектрическая проницаемость принимает вид:

$$\varepsilon = 1 + \sum_k \frac{4\pi N_k e_k^2 / m_k}{\omega_k^2 - \omega^2 + 2i\gamma_k \omega} \quad (3.6.18)$$

По мере приближения к собственным частотам дисперсия имеет нормальный характер, а внутри полосы поглощения дисперсия становится аномальной (см рис. 6.4).

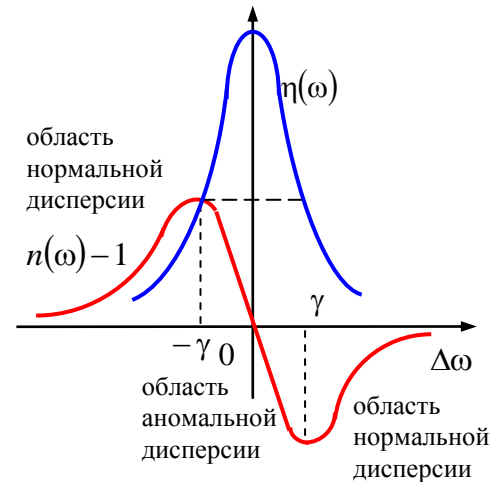


Рис. 6.3.

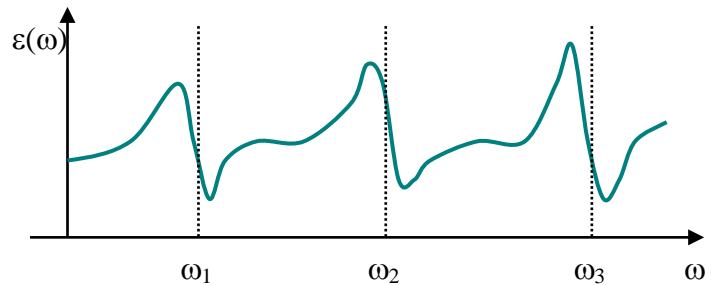


Рис. 6.4.

Примечание 2. Помимо дисперсии, связанной с вынужденными колебаниями электронов и ионов, существует другой вид дисперсии в средах с полярными молекулами. Меняется “ориентационная” поляризация и обусловленная ей диэлектрическая проницаемость. При облучении светом частоты ω появляется вынужденное вращение (колебание) молекул с той же частотой, а амплитуда вращений зависит от частоты ω или длины волны света λ . У полярных диэлектриков дисперсия проявляется начиная с сантиметрового диапазона и показатель преломления убывает с ростом частоты – аномальная дисперсия.

Примечание 3. В области радиоволн ($\lambda > 1\text{см}$) существенна только одна собственная частота $\omega_0 = 0$, которой обладают свободные электроны. Тогда получаем:

$$\varepsilon = 1 - \frac{4\pi N e^2 / m}{\omega^2} = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}$$

Если нет свободных электронов, то нет и дисперсии для радиоволн.

Примечание 4. *Франсуа Пьер Леру, французский физик, 1832–1907*

Литература:
Сивухин Оптика §§84