

## ГЛАВА V. ОПТИКА.

### V.1. Световая волна

С точки зрения современной физики свет в одних явлениях ведет себя как электромагнитная волна (ЭМВ), в других явлениях – как частица. В этом разделе физики (оптика) изучается свет как ЭМВ. В любой ЭМВ есть электрическая  $\vec{E}$  и магнитная  $\vec{H}$  составляющие. Как показывает опыт, на человека влияние оказывает лишь электрическая составляющая ЭМВ. Поэтому далее будет основное внимание уделяться именно ей. Рассмотрим сферическую монохроматическую волну. Уравнение такой волны

$$\vec{E} = \vec{E}_m \cos(\omega t - kr + \alpha),$$

где  $\omega$  - частота ЭМ колебаний в волне,  $k$  – модуль волнового вектора, а  $\alpha$  - начальная фаза колебаний. Величина  $n = c/v$  называется абсолютным показателем преломления среды. В этой формуле

$$v = \frac{d\omega}{dk} = \frac{\omega}{k}$$

фазовая скорость волны. Сравнивая полученную ранее формулу для фазовой

скорости  $v = \frac{c}{\sqrt{\epsilon\mu}}$ , получаем для показателя преломления  $n = \sqrt{\epsilon\mu}$ . Обычно у

прозрачных сред магнитная проницаемость  $\mu \approx 1$ , поэтому  $n = \sqrt{\epsilon}$ . Значит, показатель преломления таких сред зависит только от диэлектрической проницаемости среды. Опыт показывает, что эта величина зависит от частоты ЭМВ. Это приводит к явлению, которое называется дисперсией.

Монохроматическая ЭМВ характеризуется частотой или длиной волны, которые связаны простой формулой  $\lambda = c/\omega$ . Экспериментальные результаты обычно представляют зависимость различных величин от длины волны. Поэтому и мы приведем диапазон длин волн, которые относятся к ЭМВ видимого диапазона (световых волн)

$$\lambda = 0.40 - 0.76 \text{ мкм.}$$

Другой характеристикой волны является ее энергия. Эта величина оценивается интенсивностью световой волны. По определению, это модуль средней по времени (за период) плотности потока энергии, проходящей через данную точку пространства. Интенсивность обозначается буквой  $I$ :

$$I = \langle \vec{S} \rangle = \langle [\vec{E}, \vec{H}] \rangle.$$

Мы уже знаем, как вычислить интенсивность монохроматической волны:

$$[\vec{E}, \vec{H}] = E_m H_m \cos^2(\omega t - kr + \alpha) = \sqrt{\epsilon \frac{\epsilon_0}{\mu_0}} E_m^2 \cos^2(\omega t - kr + \alpha).$$

При вычислениях мы использовали одно из ранее изученных свойств ЭМВ. При усреднении по времени вместо квадрата косинуса появляется множитель  $1/2$ :

$$\langle \cos^2(\omega t - kr + \alpha) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \cos^2(\omega t - kr + \alpha) dt = \frac{1}{2}.$$

Окончательно для интенсивности света получаем формулу

$$I = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} n E_m^2.$$

Линии, вдоль которых распространяется световая волна, называются лучами. На луче вектор Пойнтинга  $\vec{S}$  параллелен касательной к лучу. Свет, испускаемый обычными источниками, называется естественным. В естественном свете есть колебания вектора  $\vec{E}$  во всех направлениях, перпендикулярных вектору  $\vec{k}$ . В отличие от такого света, свет, в котором направления колебаний вектора  $\vec{E}$  упорядочены каким-либо образом, называется поляризованным. Если колебания светового вектора происходят в одной плоскости, проходящей через луч, свет называется плоскополяризованным (линейно поляризованным). Если  $\vec{E}$ , поворачиваясь относительно луча при движении волны, описывает в плоскости, перпендикулярной лучу, эллипс, то свет эллиптически поляризован, если круг – то поляризован по кругу.

## V.2. Групповая и фазовая скорости

Итак, уравнение гармонической волны можно записать так

$$\vec{E} = \vec{E}_m \cos(\omega t - \vec{k}\vec{r} + \alpha).$$

Величина, стоящая под знаком косинуса, называется фазой волны. Если волна распространяется вдоль оси  $z$ , то ее фаза изменяется по закону  $\Phi = \omega t - kz$ . Тогда фазовая скорость волны будет равна  $v = \omega/k$ , причем  $\lambda = 2\pi/k$ . Если это монохроматическая волна, то с этой скоростью движется и поверхность постоянной фазы и максимум энергии. Но проблема состоит в том, что с помощью такой волны никакого сигнала не передать. Дело в том, что монохроматическая волна – это **бесконечная** последовательность горбов и впадин с одной частотой следования. А, как известно, если есть необходимость передать какую-либо информацию, то сигнал должен быть не такой. Он должен содержать уже несколько частот (гармоник). Оборванная монохроматическая волна перестает быть таковой и имеет сложный частотный спектр. Поэтому любая *реальная* волна представляет собой совокупность нескольких гармоник. В силу того, что диэлектрическая проницаемость большинства сред зависит от частоты, то получается, что



разные гармоники будут двигаться с разной скоростью и форма волны при ее движении будет изменяться. Это явление (зависимость скорости ЭМВ от ее частоты) называется дисперсией. В этом случае вводится понятие групповой скорости. Под групповой скоростью светового импульса понимают скорость, с которой движется максимум его интенсивности  $I_m \sim nE_m^2$ . На рисунке изображен сигнал, состоящий из трех гармоник, в два момента времени (нормальная дисперсия). Групповая скорость важна еще и тем, что любой прибор регистрирует энергию волны, а это значит, что в первую очередь регистрирует максимум интенсивности. Получим формулу для групповой скорости. По сложившейся традиции получим ее на простейшем примере, а затем обобщим на любой случай. Рассмотрим волновой пакет (световой импульс), состоящий из двух гармоник с близкими частотами  $\omega_1$  и  $\omega_2$  и волновыми векторами  $k_1$  и  $k_2$ . Волны имеют одну поляризацию и распространяются в одном направлении:

$$E_1 = E_0 \cos(\omega_1 t - k_1 z); E_2 = E_0 \cos(\omega_2 t - k_2 z)$$

При сложении по принципу суперпозиции для электрического поля получаем

$$E = E_1 + E_2 = 2E_0 \cos\left\{\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t - \frac{k_1 - k_2}{2}z\right\} \cos\left\{\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t - \frac{k_1 + k_2}{2}z\right\}.$$

Такое образование и называется группой волн или волновым пакетом. Последний множитель можно рассматривать как монохроматическую волну, а остальные множители – как ее амплитуду. При этом максимум амплитуды этой волны будет двигаться со скоростью, которую можно определить из уравнения

$$\Phi_{\text{ОГИБ}} = \frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t - \frac{k_1 - k_2}{2}z = \text{const}.$$

Дифференцируя по времени, получаем

$$\frac{dz}{dt} = u = v_{\text{ГР}} = \frac{\omega_1 - \omega_2}{k_1 - k_2}.$$

Общая же формула будет выглядеть так:

$$u = v_{\text{ГР}} = \frac{\partial \omega}{\partial k}.$$

Считая, что  $\omega = vk$ , получаем связь групповой и фазовой скорости

$$u = v + \frac{\partial v}{\partial k}k.$$

Используя связь между волновым вектором и длиной волны ( $k=2\pi/\lambda$ ), получаем формулу

Релея  $u = v - \frac{\partial v}{\partial \lambda}\lambda$ . Для различных сред существует три случая:

- 1)  $\partial v/\partial \lambda = 0$ . Это случай отсутствия дисперсии (вакуум, воздух,  $H_2O$ ).
- 2)  $\partial v/\partial \lambda > 0$ . Нормальная дисперсия -  $u < v$  (стекло и большинство прозрачных сред).
- 3)  $\partial v/\partial \lambda < 0$ . Аномальная дисперсия -  $u > v$  (сероуглерод).

### V.3. Интерференция. Когерентность

Интерференцией называется изменение средней плотности потока энергии ( $\vec{S}$ ), обусловленное суперпозицией ЭМВ. Рассмотрим это явление на простейшем примере. Пусть в точке Р одновременно существуют две произвольные (в общем случае немонохроматические) ЭМВ  $\vec{E}_1$  и  $\vec{E}_2$ . В соответствии с принципом суперпозиции  $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$  и  $E^2 = E_1^2 + E_2^2 + 2\vec{E}_1\vec{E}_2$ . Любой прибор регистрирует не мгновенное значение электрического поля (или потока энергии), а усредненное за время измерения значение. Глаз как измерительный прибор тоже не различает быстрых изменений светового потока. После усреднения последнего соотношения, получаем

$$\langle E^2 \rangle = \langle E_1^2 \rangle + \langle E_2^2 \rangle + 2\langle \vec{E}_1\vec{E}_2 \rangle.$$

В зависимости от результата усреднения последнего слагаемого в правой части равенства может быть два различных случая:

случай I)  $\langle E^2 \rangle = \langle E_1^2 \rangle + \langle E_2^2 \rangle$ ;  $I = I_1 + I_2$ ; интерференции нет

случай II)  $\langle E^2 \rangle \neq \langle E_1^2 \rangle + \langle E_2^2 \rangle$ ;  $I \neq I_1 + I_2$ ; интерференция есть.

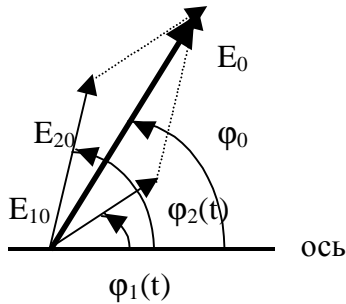
Неравенство  $\langle \vec{E}_1\vec{E}_2 \rangle \neq 0$  служит необходимым условием интерференции. Нарушение аддитивности интенсивности I связано не с нарушением закона сохранения энергии, а с перераспределением энергии по волновому фронту при взаимодействии волн. Из анализа формулы ясно, что если частоты волн различны, то интерферировать они не будут.

Аналогичный результат получается для волн с взаимно перпендикулярными векторами электрического поля ( $\vec{E}_1 \perp \vec{E}_2$ ).

Рассмотрим простейший случай сложения двух ЭМВ одинаковой частоты  $\omega$ , для которых  $\vec{E}_1 \uparrow \uparrow \vec{E}_2$ . В этом случае электрическое поле ЭМВ в точке Р можно записать так

$$E_1 = E_{10} \cos(\omega t - \varphi_1(t)); E_2 = E_{20} \cos(\omega t - \varphi_2(t)).$$

Для сложения этих волн используем метод векторных диаграмм. С помощью диаграммы можно просто получить амплитуду результирующей волны  $\vec{E}_0$  и ее начальную фазу  $\varphi_0$ :



$$E_0^2(t) = E_{10}^2 + E_{20}^2 + 2E_{10}E_{20} \cos(\varphi_2(t) - \varphi_1(t));$$

$$\operatorname{tg} \varphi_0 = \frac{E_{10} \sin \varphi_1(t) + E_{20} \sin \varphi_2(t)}{E_{10} \cos \varphi_1(t) + E_{20} \cos \varphi_2(t)}.$$

В этих формулах стоят мгновенные значения величин. Как мы уже знаем, эти величины необходимо усреднить.

Получаем формулу для вычисления квадрата амплитуды:

$$\langle E_0^2 \rangle = \frac{1}{t'} \int_0^t E_0^2(t) dt = \langle E_{10}^2 \rangle + \langle E_{20}^2 \rangle + 2E_{10}E_{20} \frac{1}{t'} \int_0^t \cos(\varphi_2(t) - \varphi_1(t)) dt.$$

Анализируя полученный ответ, можно получить необходимое условие интерференции: за время измерения  $t'$  разность фаз  $\varphi_1 - \varphi_2$  должна сохранять свое значение. Волны, удовлетворяющие такому условию, называются **когерентными**.

Дополнительным (достаточным) условием интерференции является равенство частот и неперпендикулярность  $\vec{E}_1$  и  $\vec{E}_2$ .

Для характеристики волны (а не регистрирующего прибора) используют понятия временной и пространственной когерентности. Временная когерентность ограничивается

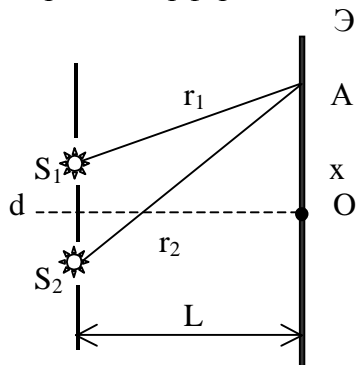
степенью монохроматичности волны  $\frac{\Delta\omega}{\omega}$ ; а пространственная когерентность

ограничивается степенью непараллельности колебаний  $\frac{|\Delta\vec{k}|}{k}$ .

Создать когерентные источники для наблюдения и использования явления интерференции можно следующими способами:

- 1) Делением амплитуды волны. К таким устройствам относится интерферометр Майкельсона.
- 2) Делением волнового фронта. К таким устройствам относятся схема Юнга, бипризма Френеля, билинза Бийе, зеркало Ллойда, бизеркало Френеля.

Рассмотрим интерференцию двух волн на примере схемы Юнга (на рисунке). Два



точечных источника  $S_1$  и  $S_2$  излучают ЭМВ в направлении экрана Э. Для простоты будем считать, что амплитуды двух волн, приходящих в точку А экрана одинаковы и равны  $E_0$ . Такие источники будут когерентны, если они являются источниками волн, рожденных от одной лампы накаливания и прошедших через малое отверстие в шторе. Расстояние между отверстиями (источниками)  $d$  должно быть мало по сравнению с расстоянием до экрана  $d \ll L$ . Кроме того интерференция волн на

экране будет наблюдаться в узкой области экрана  $x \ll L$ . Итак, в точку А приходит две сферические волны одного направления  $E_1 = E_0 \cos(\omega t - kr_1)$ ;  $E_2 = E_0 \cos(\omega t - kr_2)$ .

По принципу суперпозиции

$$E = E_1 + E_2 = 2E_0 \cos\left(\frac{\Phi_1 - \Phi_2}{2}\right) \cos\left(\frac{\Phi_1 + \Phi_2}{2}\right).$$

В этой формуле  $\Phi_1 - \Phi_2 = \omega t - kr_1 - \omega t - kr_2 = k(r_1 - r_2) = \Delta\Phi$  называется разностью фаз. Величина  $\Delta = \Delta\Phi/k = r_1 - r_2$  называется разностью хода. Напомним, что оптической разностью хода называется величина  $\Delta_{\text{опт}} = n_1 r_1 - n_2 r_2$ . Тогда выражение для интенсивности результирующей волны будет выглядеть так:

$$I = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} n E_m^2 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} n 4E_0^2 \cos^2 \frac{r_2 - r_1}{2} k = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} n 2E_0^2 (1 + \cos k\Delta).$$

Итак, если волны распространятся в вакууме, то интенсивность на экране будет пропорциональна

$$I \sim 2E_0^2 (1 + \cos k\Delta).$$

Это означает, что в точках экрана, в которых выполняется условие  $\Delta = \pm \lambda m$  ( $m = 0, 1, 2, \dots$ ) будет наблюдаться максимум интенсивности (яркое пятно) с  $I \sim 4E_0^2$ . В точках же экрана, в которых выполняется условие  $\Delta = \pm \lambda(m + 1/2)$  ( $m = 0, 1, 2, \dots$ ) будет наблюдаться минимум интенсивности (темное пятно) с  $I = 0$ . Координаты максимумов и минимумов интенсивности света на экране можно определить по рисунку:

$$r_2 - r_1 = \sqrt{L^2 + (x + d/2)^2} - \sqrt{L^2 + (x - d/2)^2} \cong \frac{xd}{L}.$$

Тогда положения максимумов будут определяться по формуле

$$x_m = \pm \frac{\lambda}{d} L m.$$

Ширина интерференционного максимума, то есть расстояние между ближайшими минимумами (или максимумами) при этом будет равна

$$\Delta x = \frac{\lambda}{d} L.$$

#### V.4. Дифракция. Принцип Гюйгенса – Френеля

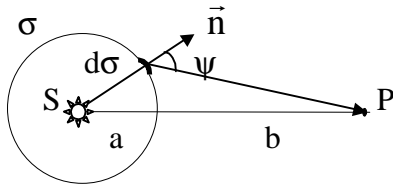
По сути, интерференция и дифракция – это одно и то же явление: перераспределение энергии волн по волновому фронту. Но исторически сложилось так, что наложение волн от дискретно расположенных источников называется интерференцией, а аналогичное явление от непрерывно расположенных источников (например, одной щели) называется дифракцией. В основе рассмотрения обоих этих явлений лежит принцип Гюйгенса – Френеля.

Первоначально Гюйгенс постулировал: каждая точка волнового фронта может рассматриваться как источник вторичных волн, огибающая которых дает волновой фронт в следующий момент времени.

В этом определении не учитывалось явление интерференции вторичных волн, поэтому не было ясно, почему волна распространяется только вперед. Лишь дополнительные исследования Френеля дали возможность использовать этот принцип в расчетах.

Напишем математические формулы, соответствующие принципу Гюйгенса-Френеля.

Рассмотрим источник S с точки зрения наблюдателя в точке P (соответствующее положение объектов изображено на рисунке). Окружим источник S сферой радиуса a, и выберем на этой поверхности  $\sigma$  участок  $d\sigma$ . Рассмотрим электрическое поле, создаваемое



в точке Р источником S, как интерференцию волн, приходящих от источников, расположенных на поверхности  $\sigma$  и характеризуемых поверхностью  $d\sigma$ , нормалью  $\vec{n}$  и углом  $\psi$ . Френель ввел коэффициент  $k(\psi)$ , который имеет максимальное значение при угле  $\psi = 0$  (когда нормаль к элементу излучающей поверхности «смотрит» на точку Р) и обращается в

ноль при  $\psi \geq \pi/2$ . Тем самым устраняется возможность распространения назад волны, движущейся вперед (устраняется возможность появления обратной волны, направленной внутрь  $\sigma$ ). Тогда для электрического поля, создаваемого этим элементом поверхности в точке Р, можно записать

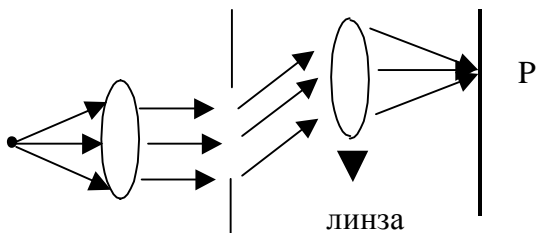
$$dE_p = k(\psi) \left\{ E_0' \frac{e^{ika}}{a} \right\} \frac{e^{ik\vec{r}}}{r} d\sigma.$$

В этой формуле нет временного множителя для волны  $e^{i\omega t}$  и учтено, что волна сферическая. Для сферической волны интенсивность связана с мощностью излучателя  $P_0$

и расстоянием от него  $r$  соотношением  $I \sim \frac{P_0}{4\pi r^2}$ , поэтому  $E \sim \sqrt{I} \sim \frac{P_0}{r}$ . Суммарное

поле от всех участков выбранной поверхности в точке Р можно определить с помощью принципа суперпозиции для вектора напряженности электрического поля:

$$E_p = \frac{E_0' e^{ika}}{a} \iint k(\psi) \frac{e^{ik\vec{r}}}{r} d\sigma.$$



Эта формула является математическим выражением принципа Гюйгенса-Френеля.

Различают два вида дифракции:

а) дифракция в параллельных лучах – дифракция Фраунгофера.

б) дифракция Френеля.

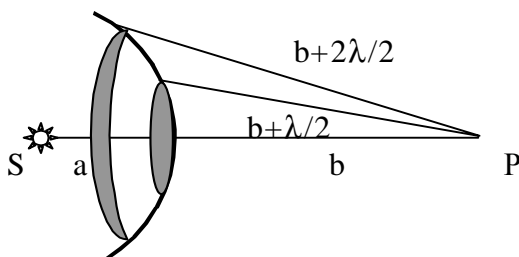
При изучении дифракции Фраунгофера используется линза (изображена на рисунке),

а при дифракции Френеля ее нет.

### V.5. Зоны Френеля. Дифракция на круглом отверстии и диске.

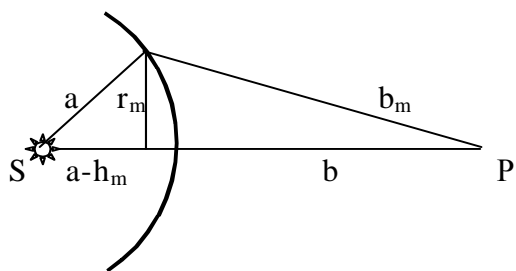
Вычисления по формуле Гюйгенса-Френеля часто очень сложны. Но в случаях,

отличающихся какой-либо симметрией, нахождение амплитуды результирующего колебания может быть найдено более просто.



Пусть точечный источник S излучает сферическую волну в сторону точки наблюдения Р. Выделим одну из волновых поверхностей и разделим ее на кольца так, чтобы разность хода от

соответствующих краев зон равнялась  $\lambda/2$ . Это и есть зоны Френеля. Общая формула для расстояний от краев зон Френеля до точки Р –  $b_m = b + m\lambda/2$ . Особенность такого деления заключается в том, что волны от соседних зон приходят в точку наблюдения в противофазе. Вычислим площадь зоны Френеля с номером  $m$ . Она равна



$$\Delta S_m = S_m - S_{m-1}. \text{ Из рисунка следует, что } r_m^2 = a^2 - (a - h_m)^2 = b_m^2 - (b + h_m)^2$$

$$\text{или } 2(a + b)h_m = m\lambda b + \left(\frac{m\lambda}{2}\right)^2.$$

Для не очень больших  $m$  ( $m \cong 1$ ) второе слагаемое можно не учитывать. Тогда

для площади сферического сегмента, равной  $S = 2\pi R h$ , подготовлены формулы для всех сомножителей и

$$S_m = \frac{\pi ab}{a + b} m\lambda; \Delta S_m = \frac{\pi ab}{a + b} \lambda.$$

Необходимо отметить тот факт, что в этом приближении площади всех зон Френеля одинаковы. Теперь найдем радиус зоны с номером  $m$ :

$$r_m = \sqrt{2ah_m} = \sqrt{\frac{ab}{a + b} m\lambda}.$$

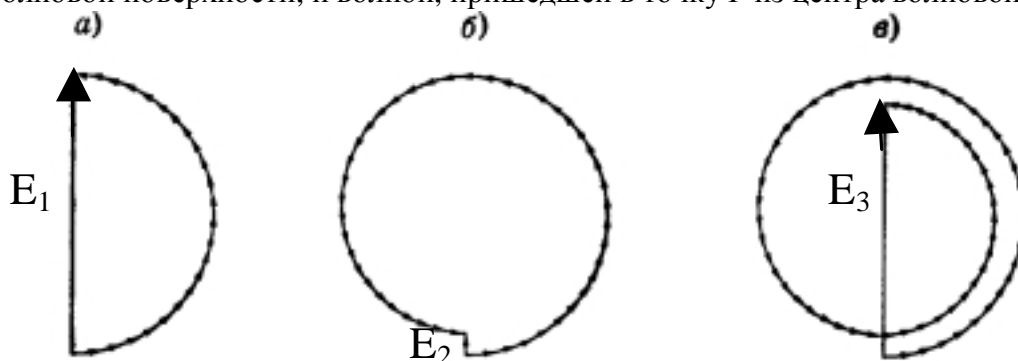
Так как волна сферическая ( $E \sim 1/r$ ), то амплитуда электрического поля убывает по мере увеличения номера  $m$  ( $b_m = b + m\lambda/2$ ), поэтому  $E_1 > E_2 > E_3 > \dots$ , а суммарная амплитуда (в силу противофазности колебаний в волнах от соседних зон) получается как

$$E = E_1 - E_2 + E_3 - E_4 + \dots = \frac{E_1}{2} + \left(\frac{E_1}{2} - E_2 + \frac{E_3}{2}\right) + \dots \cong \frac{E_1}{2}.$$

При расчете использован тот факт, что выражение в скобках с достаточной степенью точности равно нулю. Таким образом оказывается, что если преграды на пути волны нет и

открыт весь волновой фронт, то интенсивность света в точке P  $I_0 = E_0^2 = \left(\frac{E_1}{2}\right)^2 = \frac{I_1}{4}$  в

четыре раза меньше, чем в случае одной первой открытой зоны Френеля. Этот же результат можно изобразить графически. От горизонтальной оси откладываются в полярных координатах модули векторов  $d\vec{E}$  от соседних точек волнового фронта. Второй координатой является разность фаз между волной, пришедшей в точку P из некоей точки волновой поверхности, и волной, пришедшей в точку P из центра волновой поверхности.

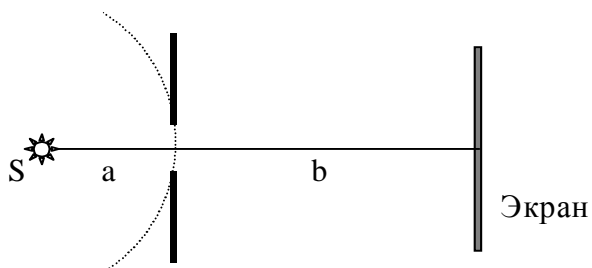


В результате кривая завивается в спираль, которая была названа спиралью Френеля. На рисунке изображены различные варианты построений векторов электрического поля в точке P с помощью спирали.

Используя эти идеи, можно увеличить интенсивность света в точке P, используя зонные пластинки: фазовые и амплитудные. Фазовая пластинка устроена так, что все нечетные зоны Френеля оказываются закрытыми и вычитания векторов электрического поля не происходит. Амплитудная зонная пластинка работает так, что фазы нечетных зон

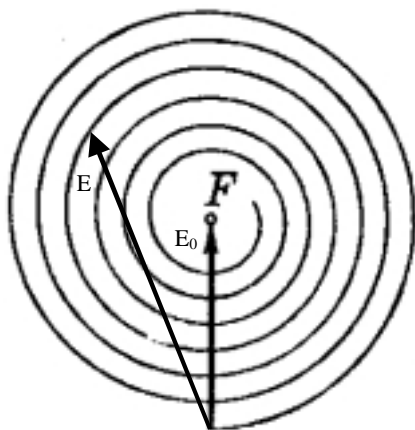
«поворачиваются» и становятся положительными. Интенсивность света в точке Р амплитудная пластинка дает в 4 раза больше.

Используем метод зон Френеля для изучения дифракции света на круглом отверстии.



Если на пути волны поставить преграду в виде плоскости с круглым отверстием, то в зависимости от размера отверстия картина освещенности экрана за преградой будет различна. Если расстояния  $a$  и  $b$  удовлетворяют соотношению

$$r_0 = \sqrt{\frac{ab}{a+b}} m \lambda,$$



где  $m$  – целое число, то отверстие оставит открытым ровно  $m$  зон Френеля. Далее, зная это число, можно по спирали Френеля определить результат дифракции в центре экрана (точка Р):

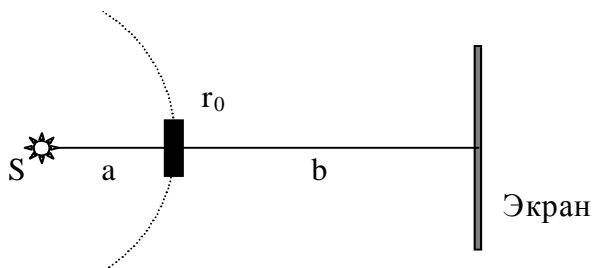
$m = 1$  (одна зона Френеля).  $I \sim E^2 = E_1^2 = 4I_0^2 = 4I_0$

$m = 2$  (две зоны Френеля).  $I \sim E^2 = 0$

$m = 3$  (три зоны Френеля).  $I \sim E^2 = E_3^2 = 4I_0^2 = 4I_0$

На рисунке индексом  $E_0$  обозначена амплитуда вектора электрического поля от всего открытого волнового фронта, а индексом  $E$  – тоже, но для части открытого волнового фронта. В остальных точках экрана дифракционная картина будет представлять собой

чередование светлых и темных колец. Все это будет наблюдаться в небольшой окрестности проекции отверстия на экран. У метода спирали Френеля есть один существенный недостаток: он дает интенсивность дифракционной картины **только** в центре экрана.



Теперь перейдем к рассмотрению дифракции световой волны на круглом диске. На пути волны от точечного источника до экрана поставим преграду в виде круглого диска, как показано на рисунке. В этом случае при сложении векторов электрического поля, приходящих в точку Р от различных

открытых зон Френеля, получается такой результат:

$$E = E_{m+1} - E_{m+2} + \dots = \frac{E_{m+1}}{2} + \left( \frac{E_{m+1}}{2} - E_{m+2} + \frac{E_{m+3}}{2} \right) + \dots \cong \frac{E_{m+1}}{2}.$$

Если значение  $m$  невелико ( $m < 10$ ), то  $E \cong \frac{E_1}{2} = E_0$ . Это означает, что если диск

закрывает небольшое число зон Френеля (хотя бы и четное), то картина на экране будет со светлым пятном в центре диска. Интенсивность в нем будет равна интенсивности, которая возникла бы в этой точке при полном отсутствии какой-либо преграды. При этом в остальных точках экрана будет наблюдаться чередование светлых и темных колец – обычная дифракционная картина. В истории физики это светлое пятно за диском известно как пятно Пуассона. Пуассон первым заметил, что по расчетам Френеля в центре экрана за диском должно быть светлое пятно. Это противоречило бытовавшим до этого взглядам на природу света. Араго тут же поставил эксперимент, который и подтвердил правоту Френеля.



## V.6. Дифракция плоской волны на щели.

Размер первой зоны Френеля играет важную роль как параметр, определяющий переход волновой оптики к геометрической оптике. Для случая падения плоской волны на круглое отверстие радиус первой зоны Френеля определяется по формуле ( $b$  – расстояние от

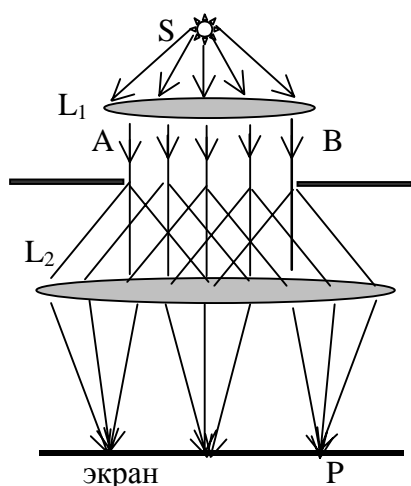
отверстия до экрана)  $r_1^2 = b\lambda$ . Тогда величина  $\frac{d^2}{b\lambda} \approx m$  по порядку величины дает число

зон Френеля, которое уместается в отверстии. В зависимости от значения этой величины возможны три варианта:

А)  $\frac{d^2}{b\lambda} \ll 1$ . Размер отверстия много меньше размера 1 з.Ф. В этом случае наблюдается дифракция Фраунгофера.

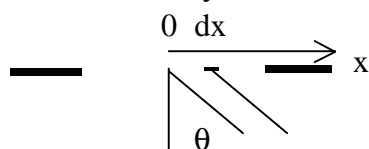
Б)  $\frac{d^2}{b\lambda} \approx 1$ . Размер отверстия сравним с размером 1 з.Ф. Наблюдается дифракция Френеля.

В)  $\frac{d^2}{b\lambda} \gg 1$ . Размер отверстия гораздо больше 1 з.Ф. В этом случае дифракции практически нет и свет распространяется в виде лучей – геометрическая оптика.



Теперь рассмотрим случай дифракции Фраунгофера на щели. Для наблюдения дифракции возьмем точечный источник света  $S$  и поместим его в фокусе собирающей линзы  $L_1$ . После нее свет пойдет в виде плоской волны и на пути встретит преграду в виде плоскости с бесконечной щелью ширины  $AB = b$ , расположенную перпендикулярно волне. За преградой дифрагированные лучи попадают на собирающую линзу  $L_2$ , которая собирает все параллельные лучи в одной точке экрана, расположенного в фокальной плоскости этой линзы. В нашу задачу входит нахождение распределения интенсивности лучей, попадающих на экран. Для этого используем принцип Гюйгенса-Френеля и его математическое выражение. Рассмотрим некоторую точку экрана  $P$ . В ней собираются лучи, вышедшие из

различных точек открытого волнового фронта (щели), но все они вышли из щели под одним и тем же углом  $\theta$ , отсчитанном от перпендикуляра к преграде. Разобьем мысленно



эту щель на очень узкие полоски шириной  $dx$ , а затем просуммируем вектора электрического поля волн, пришедших в точку  $P$  от этих полосок. Амплитуда электрического поля в точке  $P$  будет пропорциональна площади излучателя, а значит  $dx$ . Поэтому амплитуду

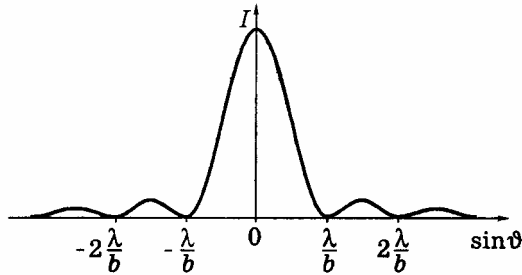
электрического поля в точке  $P$  запишем так:  $dE_m = E_0^* dx/b$ . Волна, пришедшая из точки с координатой  $x$  под углом  $\theta$ , опережает по фазе волну, пришедшую из точки с координатой  $x = 0$  на  $d\phi = kx \cdot \sin\theta$  (см. рисунок). Тогда отвлекаясь от всех остальных множителей (не зависящих от  $x$ ), запишем электрическое поле волны в точке  $P$  в виде (запись в комплексном виде; нам нужна только вещественная часть)

$$\text{Re } E = \text{Re} \frac{E_0}{b} \int_{-b/2}^{b/2} e^{ikx \sin\theta} dx = \text{Re} \frac{E_0}{b} \frac{1}{k \sin\theta} \int_{-b/2}^{b/2} e^{i(kx \sin\theta)} (k \sin\theta dx) = E_0^* \frac{\sin \alpha}{\alpha}$$

В этой формуле буквой  $\alpha$  обозначено выражение

$$\alpha = \frac{k b \sin \theta}{2} = \frac{\pi b \sin \theta}{\lambda}.$$

Тогда для интенсивности световой волны, попавшей в точку экрана Р под углом  $\theta$ , получаем следующее выражение



$$I(\theta) = I_0 \frac{\sin^2 \alpha}{\alpha^2} = I_0 \frac{\sin^2 \left( \frac{\pi b \sin \theta}{\lambda} \right)}{\left( \frac{\pi b \sin \theta}{\lambda} \right)^2}.$$

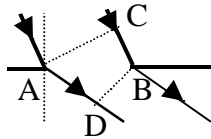
График этой зависимости изображен на рисунке. Минимумы интенсивности будут наблюдаться в точках, в которых синус будет обращаться в ноль (кроме центральной точки):  $\alpha = m\pi$ ,  $m = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \dots$ . Расчет дает формулу для минимумов дифракционной картины:

$$b \cdot \sin \theta = m\lambda, \quad m = \pm 1, \pm 2, \dots$$

Для нахождения положения максимумов интенсивности света на экране необходимо вычислить производную от интенсивности и приравнять ее к нулю. В результате расчетов для максимумов интенсивности получается трансцендентное уравнение

$$\operatorname{tg} \alpha = \alpha \quad \text{или} \quad \operatorname{tg} \left( \frac{\pi b \sin \theta}{\lambda} \right) = \left( \frac{\pi b \sin \theta}{\lambda} \right).$$

Если плоская световая волна падает на щель наклонно под углом  $\theta_0$  к нормали, то



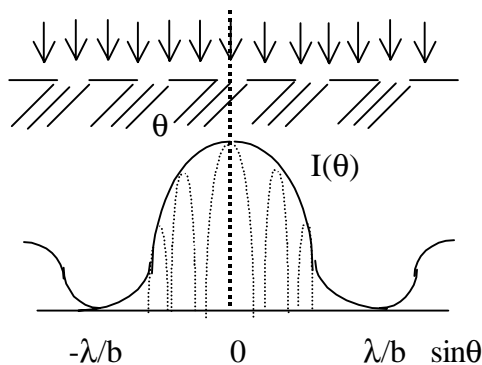
разность хода между колебаниями, распространяющимися от краев щели под углом  $\theta$  к нормали, будет равна  $\Delta = b(\sin \theta - \sin \theta_0)$ , поэтому условие минимумов интенсивности изменится и примет вид

$$b(\sin \theta - \sin \theta_0) = m\lambda, \quad m = \pm 1, \pm 2, \dots$$

### V.7. Дифракционная решетка. Условие максимумов и минимумов интенсивности.

Дифракционная решетка – это прибор для разложения световой волны в спектр и определение его спектрального состава. Дифракционные решетки бывают:

- 1) стеклянные, когда на прозрачной поверхности специальное устройство наносит штрихи. Такая ДР работает как на просвет, так и на отражение.
- 2) металлические, когда на полированной поверхности металла наносятся штрихи. Такая ДР работает только на отражение.



Рассмотрим дифракционные свойства *идеализированной* ДР. Она представляет собой  $N$  бесконечных щелей шириной  $b$  в непрозрачном экране. Размер самой преграды между щелями  $a$ . Постоянной решетки называется величина  $d = b + a$ . Ширина всей ДР  $L \approx 1$  см, что гораздо меньше, чем расстояние от ДР до экрана. Наблюдение дифракционной картины происходит на экране, помещенном в фокальной плоскости линзы, или на экране, удаленном от решетки. В обоих случаях наблюдается дифракция в параллельных лучах. Световая волна падает на ДР перпендикулярно

решетке, начало координат и отсчет фазы производится от середины ДР. Тогда для вторичных световых волн, идущих от открытых частей волнового фронта под углом  $\theta$ , разность хода от соседних щелей равна  $d \sin \theta$ , а разность фаз в этом случае равна

$$\delta = kd \sin \theta = \frac{2\pi}{\lambda} d \sin \theta.$$

Найдем амплитуду электрического поля в точке Р на экране, в которой собираются лучи от всех щелей, идущие под углом  $\theta$  к нормали. Для этого используем результат, полученный в предыдущем параграфе для одной щели. Для центральной щели напряженность электрического поля в точке Р будет равна (обозначения те же)

$$E_0 = E_0^* \frac{\sin \alpha}{\alpha}$$

Тогда для остальных щелей с номерами  $\pm 1, \pm 2, \dots$  аналогичные величины равны

$$E_1 = E_0 e^{-i\delta}; E_2 = E_0 e^{-i2\delta}; \dots E_{N/2} = E_0 e^{-i\frac{N}{2}\delta}.$$

Полное электрическое поле на экране будет суммой геометрической прогрессии

$$E = E_0 \left[ e^{i\frac{N}{2}\delta} + \dots + e^{i\delta} + 1 + e^{-i\delta} + \dots + e^{-i\frac{N}{2}\delta} \right] = E_0 \frac{e^{i\frac{N}{2}\delta} (1 - e^{-iN\delta})}{1 - e^{-i\delta}} = E_0 \frac{\sin \frac{N}{2} \delta}{\sin \frac{\delta}{2}} e^{i\frac{\delta}{2}}.$$

Для интенсивности электрического поля волны в точке Р на экране получаем

$$I(\theta) = I_0 \frac{\sin^2 \alpha}{\alpha^2} \frac{\sin^2 \left( N \frac{\delta}{2} \right)}{\sin^2 \left( \frac{\delta}{2} \right)}.$$

Напоминаем, что  $\alpha = \frac{kb \sin \theta}{2} = \frac{\pi b \sin \theta}{\lambda}$ , а  $\delta = kd \sin \theta = \frac{2\pi}{\lambda} d \sin \theta$ .

С помощью этих формул можно определить максимумы и минимумы освещенности экрана. В центр экрана волны от различных щелей приходят в фазе. При этом если амплитуда электрического поля в центре экрана от одной щели  $E_0$ , то от  $N$  щелей она будет в  $N$  раз больше. При этом интенсивность света в этой точке будет в  $N^2$  раз больше, чем от одной щели. Аналогичная картина будет наблюдаться и в направлениях, для которых выполняется условие – разность хода волн, идущих от соседних щелей должна равняться целому числу длин волн:

$$d \sin \theta = m\lambda; m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3 \dots$$

Точки экрана, для которых выполняются эти условия, дают положения главных максимумов интенсивности дифракционной картины. Для нахождения положения минимумов воспользуемся тем фактом, что первая дробь в формуле для интенсивности обращается в ноль при условии, которое было получено в предыдущем параграфе:

$$b \sin \theta = m_1 \lambda; m_1 = \pm 1, \pm 2, \pm 3 \dots$$

В этом направлении ни одна щель не излучает, поэтому такие минимумы носят название главных минимумов. Кроме главных минимумов на дифракционной картине имеются точки, в которых выполняется условие  $\sin(N\delta/2) = 0$ , а  $\sin(\delta/2) \neq 0$ . При этом второй сомножитель в формуле для интенсивности обращается в ноль, что дает условие побочных (добавочных или второстепенных) минимумов:

$$d \sin \theta = \left( m + \frac{p}{N} \right) \lambda; m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3 \dots; p = 1, 2, \dots, N - 1.$$

Действительно, рассмотрим промежуток углов  $\theta$  между  $m$  и  $m-1$ . При этом значение  $\delta/2$  изменяется от 0 до  $\pi$ . Знаменатель второго сомножителя при этом не равен нулю, а числитель  $[\sin(N\delta/2)]$  обращается в нуль  $N-1$  раз. Таким образом, в этом диапазоне углов (между двумя главными максимумами) будет находиться  $N-1$  побочных минимумов.

V.8. Электромагнитная волна на границе раздела двух прозрачных сред. Законы отражения и преломления как следствия уравнений Максвелла.

На границе раздела двух различных сред ход светового луча может измениться. Дело в том, что скорости распространения волны в этих средах будут различны. Математическое выражение этого факта – граничные условия, которым подчиняется световая волна. Если на границе раздела двух сред нет свободных зарядов ( $\sigma = 0$ ) и токов ( $j = 0$ ), то

$$E_{\tau 1} = E_{\tau 2}; H_{\tau 1} = H_{\tau 2}; D_{n1} = D_{n2}; B_{n1} = B_{n2}.$$

Из этих четырех формул только две независимы. Покажем это с помощью уравнений

Максвелла. Нужно нам уравнение выглядит так:  $\oint \vec{H} d\vec{l} = \int \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} d\vec{S}$  или  $\oint H_1 dl = \int \dot{D}_n dS$ .

Поэтому, если касательные к поверхности раздела компоненты вектора  $H_1$  одинаковы в обеих средах, то и производные по времени от нормальных к поверхности раздела компонент вектора смещения  $D_n$  должны быть одинаковы. Как мы уже знаем, для случая монохроматических сред  $\vec{D} = \vec{D}_0 e^{i\varphi}$  и  $\dot{\vec{D}} = i\omega \vec{D}$ . Поэтому равенство производных означает и равенство самих величин. Аналогично доказывается эквивалентность первого и четвертого граничного условия. Итак, независимыми оказываются два граничных условия – первое и второе. Так как на плоскости у любого вектора две независимых проекции, то всего получается четыре независимых уравнения, связывающие вектора электрического и магнитного поля по обе стороны границы. Воспользуемся ими для получения *законов отражения и преломления*.

Рассмотрим падение плоской волны естественного света на границу раздела двух прозрачных диэлектриков (диэлектрические проницаемости  $\epsilon_1$  и  $\epsilon_2$ ) под углом  $\theta$ . Обозначим волновые вектора падающей, отраженной и преломленной световых волн буквами  $\vec{k}, \vec{k}'$  и  $\vec{k}''$ . Все эти вектора лежат в одной плоскости, которую назовем плоскостью падения волны. Это следует из однородности каждой полу бесконечной среды. Выделим из естественного света одну плоскую линейнополяризованную монохроматическую волну. Тогда вектор электрического поля для нее в комплексном виде запишется так

$$\vec{E} = \vec{E}_m e^{i(\omega t - \vec{k}\vec{r})} = \vec{E}_m e^{i(\omega t - k_x x - k_y y)}.$$

Поле в среде 1 состоит из полей падающей и отраженной волн

$$\vec{E}_1 = \vec{E} + \vec{E}' = \vec{E}_m e^{i(\omega t - k_x x - k_y y)} + \vec{E}'_m e^{i(\omega' t - k'_x x - k'_y y + \alpha')},$$

а в среде 2 существует только преломленная волна

$$\vec{E}_2 = \vec{E}'' = \vec{E}''_m e^{i(\omega'' t - k''_x x - k''_y y + \alpha'')}.$$

В нашу задачу входит нахождение связи между частотами, волновыми векторами и начальными фазами колебаний падающей, отраженной и преломленной волнах. Далее мы используем граничное условие  $E_{\tau 1} = E_{\tau 2}$  для случая  $y = 0$ . Получаем следующее равенство

$$E_{m\tau} e^{i(\omega t - k_x x)} + E'_{m\tau} e^{i(\omega' t - k'_x x + \alpha')} = \vec{E}''_m e^{i(\omega'' t - k''_x x + \alpha'')}.$$

Сначала получим соотношение между частотами. Так как это равенство должно быть справедливо при любом  $x$ , то и при  $x = 0$  оно сохраняется. Но тогда сумма двух гармонических функций будет тоже гармонической функцией. А это возможно только в случае, если у всех волн одна и та же частота. Итак,  $\omega = \omega' = \omega''$ .

Теперь перейдем к волновым векторам. Исходное равенство справедливо в любой момент времени, а значит справедливо и в момент  $t = 0$ . Кроме того, оно должно выполняться и в любой точке границе раздела (при любом  $x$ ). Отсюда следует, что  $k_x = k'_x = k''_x$  или

$$k \sin \theta = k' \sin \theta' = k'' \sin \theta''.$$

Так как волновые вектора падающей и отраженной волн по модулю одинаковы, то мы получаем *закон отражения*

$$\theta = \theta'.$$

Используя соотношение  $k'' = \frac{\omega}{v_2}$ , получаем *закон преломления*

$$\frac{\sin \theta}{\sin \theta'} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{n_2}{n_1} = n_{21}.$$

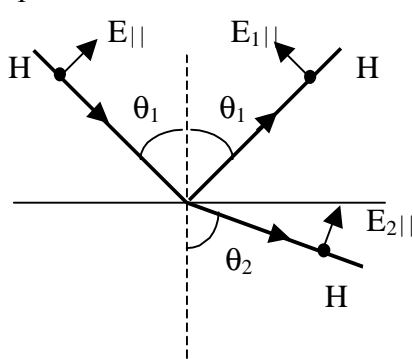
Получили мы эти законы для одной линейно поляризованной волны, но по принципу суперпозиции можно из таких волн составить любую волну, в том числе и естественный свет. Поэтому эти законы выполняются для любой электромагнитной волны.

Несколько слов скажем о явлении, названном полным внутренним отражением (ПВО). В законе преломления заложена возможность того, что в случае, когда  $n_2 < n_1$ , значение  $\sin \theta' = 1$ , а числитель при этом меньше единицы. Это означает, что преломленная волна есть, но она идет вдоль границы раздела сред, не проходя во вторую среду. Условием этого является соотношение

$$\sin \theta_{\text{ПВО}} = \frac{n_2}{n_1}; n_2 < n_1.$$

### V.9. Поляризация электромагнитной волны на границе раздела двух сред. Формулы Френеля.

В этом параграфе мы рассмотрим падение волны естественного света на границу раздела двух прозрачных диэлектриков (диэлектрические проницаемости  $\epsilon_1$  и  $\epsilon_2$ ) с точки зрения поляризационных свойств ЭМВ. Естественный свет – неполяризованный. Его можно представить в виде двух взаимно перпендикулярно линейно поляризованных волн, фазы которых никак не связаны. Такие волны являются некогерентными. Обозначим



электрическое поле таких волн буквами  $\vec{E}_{\perp}$  и  $\vec{E}_{\parallel}$ .

Первый из векторов перпендикулярен плоскости падения световой волны, второй вектор параллелен этой плоскости. В силу некогерентности волн, закон их сложения таков:  $E^2 = E_{\perp}^2 + E_{\parallel}^2$ .

В нашу задачу входит нахождение формул, связывающих электрические поля отраженной и падающей волны, а так же преломленной и падающей волны. Выделим из естественной волны одну из составляющих и найдем для нее искомые формулы.

1) Вектор  $\vec{E}$  исходной волны лежит в плоскости падения. При этом вектор  $\vec{H}$  перпендикулярен плоскости падения. Тогда граничные условия для касательных проекций векторов электрического и магнитного поля будут выглядеть так:

$$E_{II} \cdot \cos\theta_1 - E_{I\text{III}} \cdot \cos\theta_1 = E_{2II} \cdot \cos\theta_2.$$

$$H_{\perp} + H_{1\perp} = H_{2\perp}.$$

Воспользуемся связью векторов электрического поля и напряженностью магнитного поля в волне  $H = n\epsilon_0 E$ . Тогда система уравнений приобретает вид:

$$E_{II} - E_{I\text{III}} = E_{2II} \frac{\cos\theta_2}{\cos\theta_1}$$

$$E_{II} + E_{I\text{III}} = \frac{n_2}{n_1} E_{2II} = E_{2II} \frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2}.$$

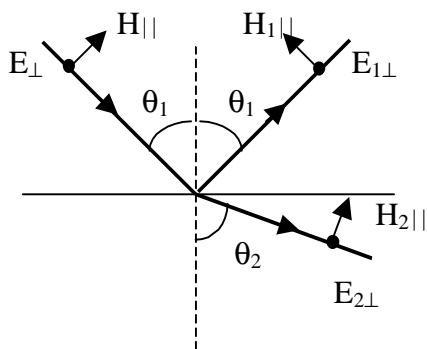
Разделив первое равенство на второе, и приведя все к общему знаменателю, можно получить окончательное выражения параллельной составляющей электрического поля отраженной волны в этом случае:

$$E_{I\text{III}} = E_{II} \frac{\text{tg}(\theta_1 - \theta_2)}{\text{tg}(\theta_1 + \theta_2)}.$$

После несложных вычислений можно получить формулу для преломленной волны:

$$E_{2II} = E_{II} \frac{2 \sin\theta_2 \cos\theta_1}{\sin(\theta_1 + \theta_2) \cos(\theta_1 - \theta_2)}.$$

2) Вектор  $\vec{E}$  исходной волны перпендикулярен плоскости падения. При этом вектор  $\vec{H}$  лежит в плоскости падения. Теперь граничные условия для касательных проекций векторов электрического и магнитного поля будут выглядеть так:



$$E_{\perp} + E_{1\perp} = E_{2\perp}.$$

$$H_{||} \cdot \cos\theta_1 - H_{1||} \cdot \cos\theta_1 = H_{2||} \cdot \cos\theta_2.$$

Проведя соответствующие вычисления, получаем формулы для электрического поля для отраженной и преломленной волн перпендикулярной к плоскости падения поляризации:

$$E_{1\perp} = E_{\perp} \frac{\sin(\theta_1 - \theta_2)}{\sin(\theta_1 + \theta_2)};$$

$$E_{2\perp} = E_{\perp} \frac{2 \sin\theta_2 \cos\theta_1}{\sin(\theta_1 + \theta_2)}.$$

Для определения энергии отраженной волны и прошедшей волны вводятся понятия коэффициента отражения  $R$  и коэффициента пропускания  $T$ :

$$R = \frac{I_1}{I_0} = \left( \frac{E_{\perp}}{E_0} \right)^2 = \frac{E_{I\text{III}}^2 + E_{1\perp}^2}{E_{II}^2 + E_{\perp}^2} = R_{\perp} + R_{II}; T = \frac{I_2}{I_0} = \frac{n_2}{n_1} \left( \frac{E_2}{E_0} \right)^2.$$

Анализ полученных формул показывает, что существует ситуация, когда параллельная плоскости падения компонента электрического поля в отраженной волне отсутствует. В этом случае отраженная волна оказывается линейно поляризованной. Условием этого является соотношение

$$\theta_1 + \theta_2 = \frac{\pi}{2}.$$

Угол падения, при котором в отраженной волне остается только  $E_{\perp}$ , называется углом Брюстера. Для этого угла имеется соотношение

$$\text{tg}\varphi_{\text{БР}} = \frac{n_2}{n_1} = n_{21}.$$

Величина этого угла для перехода воздух-стекло  $\theta_{БР} = 57^0$ .

#### V.10. Двойное лучепреломление.

Электрическое поле в веществе (в том числе и поле ЭМВ) характеризуется векторами  $\vec{E}$  и  $\vec{D}$ . Для изотропных сред связь между этими величинами простая  $\vec{D} = \epsilon\epsilon_0\vec{E}$ . В этой формуле  $\epsilon$ - диэлектрическая проницаемость вещества, которая является в этом случае скаляром. В природе существуют вещества, имеющие анизотропные свойства. Это означает, что свойства таких веществ в различных направлениях различны. Для таких веществ связь между векторами  $\vec{E}$  и  $\vec{D}$  более сложная и осуществляется через тензор

$$D_x = \epsilon_0(\epsilon_{xx}E_x + \epsilon_{xy}E_y + \epsilon_{xz}E_z)$$

$$D_y = \epsilon_0(\epsilon_{yx}E_x + \epsilon_{yy}E_y + \epsilon_{yz}E_z) \Rightarrow D_i = \sum_j \epsilon_0\epsilon_{ij}E_j \quad ; i = 1,2,3; j = 1,2,3.$$

$$D_z = \epsilon_0(\epsilon_{zx}E_x + \epsilon_{zy}E_y + \epsilon_{zz}E_z)$$

диэлектрической проницаемости ( $\epsilon_{ij}$ ). Понятие тензора уже встречалось нам, когда мы изучали движение твердого тела (тензор инерции). Тогда мы рассмотрели основные свойства тензора. Из приведенных уравнений ясно, что вектора  $\vec{E}$  и  $\vec{D}$  могут быть не параллельны. Точная теория показывает, что тензор диэлектрической проницаемости должен быть симметричным -  $\epsilon_{ij} = \epsilon_{ji}$ . Кроме того, для каждого кристалла существует такая система координат, в которой тензор ( $\epsilon_{ij}$ ) превращается в диагональный. Оси такой

$$\begin{pmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} & \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{yx} & \epsilon_{yy} & \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{zx} & \epsilon_{zy} & \epsilon_{zz} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \epsilon_x & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_z \end{pmatrix}$$

системы координат называются главными осями кристалла. Для главных осей справедливо соотношение

$$\epsilon_x x^2 + \epsilon_y y^2 + \epsilon_z z^2 = \text{const}.$$

Учитывая соотношение  $n = \sqrt{\epsilon}$ , получаем

$$(n_x x)^2 + (n_y y)^2 + (n_z z)^2 = \text{const}.$$

Это уравнение определяет фигуру, называемую эллипсоидом Френеля. У этого эллипсоида (как и любого другого) имеется два круговых сечения. Оси, перпендикулярные этим круговым сечениям, называются оптическими осями кристалла. В общем случае их две. Форма эллипсоида Френеля зависит от значения диагональных компонент тензора диэлектрической проницаемости кристалла. Если выполняется условие

$$\epsilon_x = \epsilon_y \neq \epsilon_z,$$

то эллипсоид Френеля становится эллипсоидом вращения. В этом случае две различные оптические оси превращаются в одну и такой кристалл называют одноосным. При этом его оптическая ось совпадает с осью z.

Получим общее уравнение для волн в одноосных кристаллах. Рассмотрим прохождение ЭМВ через не поглощающий немагнитный кристалл, в котором нет ни внесенных зарядов ( $\sigma = 0$ ), ни макроскопических токов ( $j = 0$ ). Для получения искомых уравнений будем использовать систему уравнений Максвелла. Решение ее будем искать в виде плоской волны, как наиболее простое. Запишем уравнения Максвелла в дифференциальной форме и используем комплексную запись векторов электрического и магнитного полей ЭМВ:

$$\text{rot } \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}; \text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}; \text{div } \vec{D} = 0; \text{div } \vec{B} = 0.$$

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\omega t - \vec{k}\vec{r})}; \vec{H} = \vec{H}_0 e^{i(\omega t - \vec{k}\vec{r})}.$$

Введем два единичных вектора – волновой  $\vec{N}_k$  и лучевой  $\vec{N}_s$ :

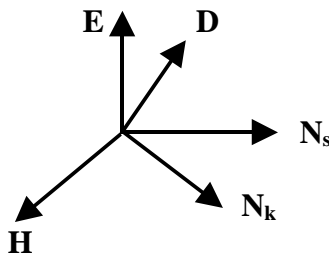
$$\vec{k} = k\vec{N}_k; \vec{S} = [\vec{E}, \vec{H}] = S\vec{N}_s.$$

После упрощений уравнения Максвелла приобретают следующий вид:

$$\vec{D} = -\frac{1}{v} \vec{N}_k \times \vec{H}; \vec{H} = \frac{1}{\mu_0 v} \vec{N}_k \times \vec{E}; \vec{N}_k \vec{D} = 0; \vec{N}_k \vec{H} = 0.$$

Анализируя полученные уравнения, можно получить соотношения между направлениями векторов, описывающих ЭМВ:

$$\vec{D} \perp \vec{N}_k, \vec{H} \perp \vec{E}, \vec{N}_k \perp \vec{E}, \vec{E} \perp \vec{H}; \vec{N}_s \perp \vec{E}, \vec{H}.$$



Таким образом, в кристаллах групповая ( $\vec{N}_s$ ) и фазовая ( $\vec{N}_k$ ) скорости в общем случае по направлению не совпадают. Лучевой вектор – это вектор, в направлении которого распространяется максимум амплитуды волны. Он сонаправлен с вектором групповой скорости. Волновой же вектор перпендикулярен волновой поверхности и сонаправлен вектору фазовой скорости волны. Получается, что ЭМВ в кристаллах не совсем поперечная (направления

всех векторов в волне показаны на рисунке).

Объединяя первые два уравнения, получаем искомую связь векторов  $\vec{E}$  и  $\vec{D}$  в волне

$$\vec{D} = -\epsilon_0 n^2 (\vec{N}_k \times \vec{N}_k \times \vec{E}).$$

Раскроем двойное векторное произведение

$$\vec{D} = \epsilon_0 n^2 (\vec{E} - \vec{N}_k (\vec{N}_k \vec{E})).$$

Это и есть общее уравнение для нахождения всех оптических свойств кристаллов. Решать его в общем случае сложно. Но, рассматривая простые случаи, можно проиллюстрировать все основные законы оптики анизотропных сред.

1) Сначала покажем возможность возникновения эллиптической поляризации волны, распространяющейся в кристалле, если падающая волна была поляризована линейно. Рассмотрим плоскую волну, распространяющуюся вдоль оси  $y$  ( $N_x = N_z = 0; N_y = 1$ ). В этом случае при произвольном направлении плоскости поляризации волны у нее будут две проекции вектора  $\vec{E}$ :  $E_x$  и  $E_z$ . Рассмотрим отдельно распространение этих компонент волны в кристалле.

а) Пусть у вектора электрического поля волны будет одна компонента  $E_x$ . Тогда

$$\vec{N}_k \vec{E} = E_x \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 = 0.$$

Общее уравнение примет вид  $\vec{D} = \epsilon_0 n^2 \vec{E}$ . Кроме того,  $D_i = \sum_j \epsilon_0 \epsilon_{ij} E_j$ . В результате

получаем  $D_x = \epsilon_0 \epsilon_{xx} E_x = \epsilon_0 n^2 E_x$ . Тогда показатель преломления в этом случае равен

$$n = \sqrt{\epsilon_{xx}}, \text{ а скорость распространения волны такой поляризации } v_x = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_{xx}}}.$$

б) Пусть у вектора электрического поля волны будет одна компонента  $E_z$ . Тогда

аналогичный расчет дает следующий результат:  $D_z = \epsilon_0 \epsilon_{zz} E_z = \epsilon_0 n^2 E_z$ . Скорость в

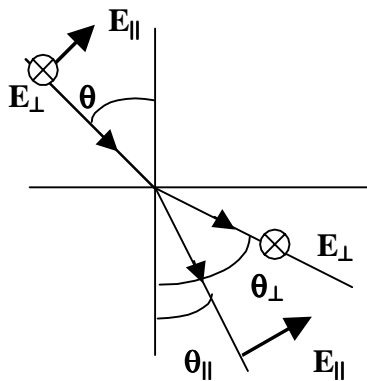
этом случае равна  $v_z = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_{zz}}}$ .



Мы рассматриваем одноосный кристалл, следовательно  $\epsilon_{zz} = \epsilon_z \neq \epsilon_x$ . Поэтому скорости двух волн, на которые мы разложили исходную волну, будут различны. Разность фаз между этими волнами будет зависеть от расстояния, которое эти волны прошли в кристалле, то есть от его толщины. В результате при определенной толщине кристалла на выходе волна будет поляризована эллиптически.

2) Теперь покажем возможность двулучепреломления для одноосного кристалла.

Пусть из воздуха в кристалл под углом  $\theta$  падает пучок естественного света. Выберем



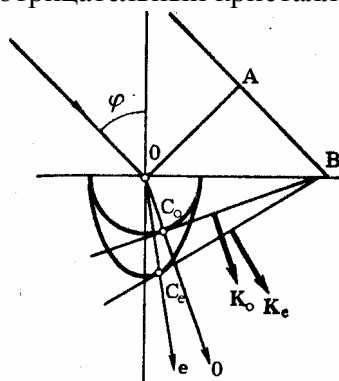
систему координат как показано на рисунке (ось  $z$  перпендикулярна плоскости рисунка). Для одноосного кристалла  $\epsilon_x = \epsilon_y \neq \epsilon_z$ . Обозначим величины  $\epsilon_x = \epsilon_y = \epsilon_0$ , а  $\epsilon_z = \epsilon_e$ . Представим падающую волну в виде двух никак по фазе не связанных взаимно перпендикулярно поляризованных волн. При этом в кристалл волны будут входить под углами, которые можно определить из уравнений (закон преломления):

$$\frac{\sin \theta}{\sin \theta_{\perp}} = n_{\perp} = \sqrt{\epsilon_e} ; \quad \frac{\sin \theta}{\sin \theta_{\parallel}} = n_{\parallel} = \sqrt{\epsilon_0} .$$

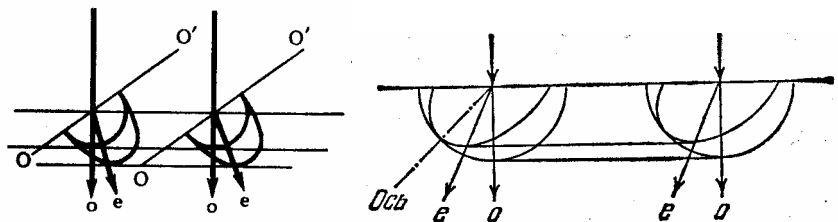
Теперь становится ясно, что волновые фронты будут различны, и в кристалле эти волны будут иметь различные направления движения – произойдет двулучепреломление.

Построение Гюйгенса. В основе теории Гюйгенса для распространения волны в анизотропных кристаллах лежит следующая идея. В кристалле у волны две волновых поверхности: одна соответствует *обыкновенной* ( $O$ ) волне, другая – *необыкновенной* ( $e$ ).

Скорость обыкновенной волны  $v_o = c/n_o$  одинакова во всех направлениях, поэтому волновая поверхность обыкновенной волны – сфера. Скорость необыкновенной волны  $v_e = c/n_e$  и зависит от направления движения этой волны. Скорости обыкновенной и необыкновенной волн одинаковы в направлении оптической оси и максимально отличаются в направлениях, перпендикулярных оптической оси. Волновая поверхность необыкновенной волны – эллипсоид вращения. Кристалл называется положительным, если  $v_o > v_e$  ( $n_o < n_e$ ); кристалл называется отрицательным, если  $v_o < v_e$  ( $n_o > n_e$ ). Сам же принцип Гюйгенса остается неизменным: каждая точка волнового фронта является источником вторичных волн. На рисунках изображены различные варианты построения волновых поверхностей. На первом рисунке рассмотрено наклонное падение света на отрицательный кристалл. Поверхность кристалла параллельна оптической оси кристалла



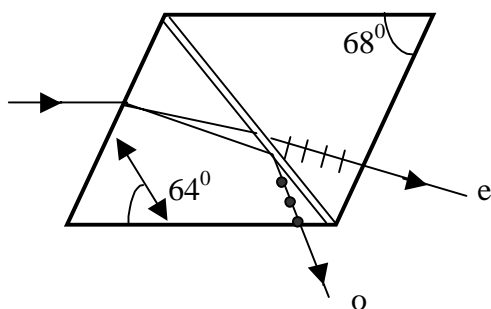
ОВ. на втором рисунке свет падает нормально на поверхность кристалла исландского шпата (отр. кристалл). Оптическая ось  $OO'$  не параллельна поверхности. Третий рисунок для положительного кристалла.



### V.11. Поляризационные приборы. Закон Малюса.

Явление двулучепреломления используется для получения поляризованного света. Такие приборы делятся на два класса: поляризационные приборы и дихроичные пластинки.

1. Поляризационные приборы. Наиболее распространенными приборами этого класса являются призмы. Изготавливаются призмы в основном из исландского шпата, кварца или натронной селитры. Различают однолучевые и двухлучевые призмы. В двухлучевых призмах распространяются два луча в различных направлениях. Наиболее распространенной поляризационной призмой является призма Николя или просто николь. На рисунке показана такая призма. Стрелкой обозначено направление оптической оси. Естественный угол скоса у

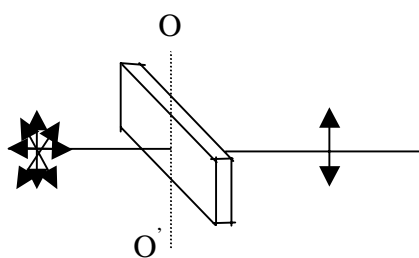


исландского шпата составляет  $71^\circ$ , для изготовления призмы  $3^\circ$  стачивают. Два куска исландского шпата склеивают канадским бальзамом. Тогда обыкновенный луч на границе склейки испытывает полное внутреннее отражение и уходит в сторону. Необыкновенный же луч на этой границе просто преломляется. Обыкновенный луч попадает на зачерненную поверхность и поглощается. Второй луч, полностью поляризованный, выходит из призмы.

2. Дихроичные пластинки. К таким приборам относятся поляроиды и турмалины. В этих приборах обыкновенный луч поглощается сильнее и, при определенной толщине поглощающего слоя, поглощается весь.

Использование поляризаторов.

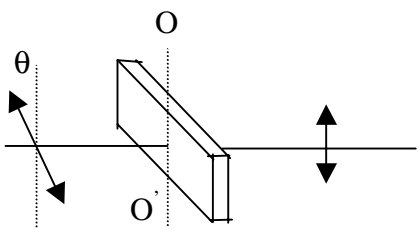
а) На поляризатор падает пучок естественного света. Идеальный поляризатор пропускает колебания электрического поля в волне только в плоскости, проходящей через оптическую ось (e-луч). Поэтому, если представить естественный свет  $\vec{E}$  как две линейно



поляризованные волны, одна из которых поляризована в плоскости оптической оси  $\vec{E}_{\parallel}$ , а другая – в перпендикулярной плоскости  $\vec{E}_{\perp}$ , то пройдет через поляризатор лишь одна, параллельная составляющая  $\vec{E}_{\parallel}$ . Поскольку

$$I_{\text{ест}} = I_{\parallel} + I_{\perp} = 2I_{\parallel} = 2I_{\perp}, \text{ то } I_{\text{прош}} = \frac{1}{2} I_{\text{ест}}.$$

б) На поляризатор падает линейно поляризованный свет. Разложим вектор электрического поля падающей волны на две взаимно



перпендикулярных составляющих  $\vec{E}_0 = \vec{E}_{\perp} + \vec{E}_{\parallel}$ .

Один из них направлен вдоль оптической оси поляризатора и проходит полностью. Второй же луч не проходит совсем. Электрическое поле после поляризатора будет определяться так

$$E_1 = E_{\parallel} = E_0 \cos \theta, \text{ а интенсивность прошедшей}$$

волны будет равна

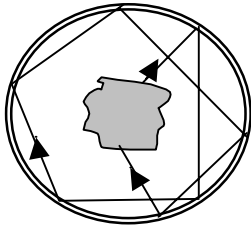
$$I = I_0 \cos^2 \theta.$$

Эта формула носит название закона Малюса.

V.12. Тепловое излучение. Равновесная плотность излучения. Закон Кирхгофа.

Вспомним основные постулаты молекулярно-кинетической теории: все вещества состоят из атомов или молекул; атомы или молекулы находятся в непрерывном движении и взаимодействуют друг с другом за счет гравитационного или электромагнитного полей.

Мы уже знаем, что атомы состоят из заряженных частиц. Любая заряженная частица, которая движется с ускорением, должна излучать. Поэтому, все атомы, участвующие в тепловом движении, должны излучать ЭМВ. Это излучение и называется тепловым. Особенностью такого излучения является сильная зависимость интенсивности теплового излучения от абсолютной температуры  $T$ . Рассмотрим основные свойства теплового излучения и дадим основные определения. Рассмотрим какое-либо тело, нагретое до температуры  $T$ . Окружим его адиабатической оболочкой и откачаем воздух. Стенки этой



оболочки идеально отражают все, что на них падает. Внутри оболочки, таким образом, останется тело и его тепловое излучение. Через некоторое время наступит равновесие между телом и излучением: энергии, излучаемая и поглощаемая телом в единицу времени, будут равны. Это равновесие называется тепловым равновесием, а излучение – равновесным тепловым излучением. Итак, тепловое излучение, которое находится в равновесии со своим телом, называется равновесным тепловым излучением. К равновесным системам применимы все законы

термодинамики. Теперь дадим несколько определений.

*Энергетической светимостью тела  $R$*  называется энергия, излучаемая с единицы поверхности тела в единицу времени во всех направлениях. Энергетическая светимость является функцией только температуры. В некоторых учебниках эта величина обозначается буквой  $M_s$ .

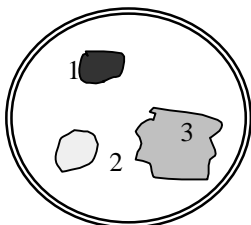
*Испускательной способностью тела  $r_\omega = \frac{dR_\omega}{d\omega}$*  называется энергия, излучаемая телом с

единицы поверхности в единицу времени в единичном частотном интервале. При этом  $dR_\omega$  - энергия, излучаемая телом в 1с с  $1m^2$  поверхности в интервале частот от  $\omega$  до  $\omega+d\omega$ . Испускательная способность тела является функцией частоты и температуры.

*Поглощательной способностью тела  $a_{\omega T} = \frac{d\Phi'_\omega}{d\Phi_\omega}$*  называется отношение потока энергии,

поглощенной телом, к потоку энергии, падающей на поверхность тела. за одно и тоже время. Ясно, что  $a_{\omega T} \leq 1$ . Если поглощательная способность тела равна единице, то такое тело называется абсолютно черным телом (АЧТ). Такое тело поглощает все излучение, которое падает на его поверхность. Если  $a_{\omega T} = a_T = \text{const} < 1$ , то такое тело называется серым телом.

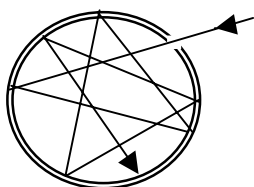
Закон Кирхгофа. Возьмем адиабатическую оболочку, в которой в состоянии теплового равновесия находятся три различных тела. При этом они обмениваются тепловым излучением. Оказывается, что хотя они и разные, но каждое из них поглощает энергию теплового излучения в той же степени, в которой и излучает. Это происходит независимо от вида тел, поэтому



$$\frac{r_{\omega T1}}{a_{\omega T1}} = \frac{r_{\omega T2}}{a_{\omega T2}} = \frac{r_{\omega T3}}{a_{\omega T3}} = \dots = f(\omega, T).$$

**Отношение испускательной и поглощательной способностей не зависит от природы тела, а является универсальной функцией частоты и температуры.**

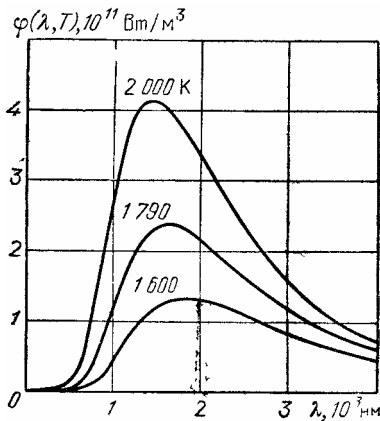
Так как для АЧТ поглощательная способность равна единице, то функция  $f(\omega, T)$  оказывается испускательной способностью АЧТ. Таких тел как АЧТ в природе в чистом виде не существует. Однако некоторые тела в определенных условиях по своим свойствам близки к АЧТ. Изображенный на рисунке объем по своим свойствам может служить



примером АЧТ. Это адиабатическая оболочка с малым отверстием для исследования свойств находящегося внутри излучения. Для таких тел есть эксперименты, результаты которых изображены на графике. В теоретических исследованиях удобнее пользоваться зависимостями от частоты, в эксперименте получаются зависимости от длины волны. Поэтому экспериментальные данные для теплового излучения представляют собой зависимости испускательной способности АЧТ от длины волны:

$dR_{\omega} = r_{\omega} d\omega; dR_{\lambda} = \varphi(\lambda, T) d\lambda$ . Так как  $dR_{\omega} = dR_{\lambda}$  и  $\omega = \frac{2\pi c}{\lambda}$ , то

$$\varphi(\lambda, T) = \frac{2\pi c}{\lambda^2} f(\omega, T).$$



Рассмотрим излучение, находящееся в равновесии со своим телом. В этом случае энергия излучения будет распределена в объеме полости с определенной плотностью  $u = u(T)$ . Спектральное распределение этой энергии можно охарактеризовать функцией  $u(\omega, T)$ , определяемой условием  $du_{\omega} = u(\omega, T) d\omega$ . Тогда

$$u(T) = \int_0^{\infty} u(\omega, T) d\omega.$$

Найдем связь между испускательной способностью АЧТ и спектральной плотностью равновесного теплового излучения. Рассмотрим полость, заполненную равновесным излучением. Воспользуемся гипотезой Планка о фотонах (подробности будут чуть позже) и запишем объемную спектральную плотность теплового излучения как  $du_{\omega} = \hbar \omega dn_{\omega}$ . При изучении молекулярной физики была получена формула, определяющая число ударов молекул газа о стенку:  $dN = 1/4 c dn_{\omega}$ . Для фотонного газа она тоже применима, поэтому в единицу времени фотоны принесут на единицу площади энергию  $1/4 \hbar \omega c dn_{\omega}$ , которая вся поглотится. Поскольку речь идет о АЧТ, вся эта энергия будет излучена.

Следовательно,  $f(\omega, T) d\omega = 1/4 \hbar \omega c dn_{\omega} = c/4 u(\omega, T) d\omega$ . Поэтому,  $f(\omega, T) = \frac{c}{4} u(\omega, T)$ .

### V.13. Излучение АЧТ. Формула Релея-Джинса.

Классическая физика оказалась не в состоянии объяснить теоретически вид функции  $\varphi(\lambda, T)$ , измеренной экспериментально. Предельные случаи  $\varphi(\lambda, T)$  при достаточно малых и достаточно больших частотах были теоретически обоснованы формулами Рэлея—Джинса и Вина. Общая формула как интерполяционная формула для предельных случаев была найдена Планком. Она положила начало развитию квантовой теории.

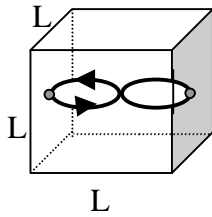
Итак, нужно получить формулу для вычисления испускательной способности АЧТ или плотность энергии теплового излучения. Попытки получить эту формулу сводились к нахождению числа возбужденных колебаний и умножению этого числа на энергию одного колебания.

**Концентрация мод колебаний.** Рассмотрим модель АЧТ в виде полости с адиабатическими стенками. Будем считать, что полость имеет форму куба с ребром  $L$ , как изображено на рисунке. Наполним ее тепловым излучением. Со временем установятся стоячие волны во всех направлениях. В этом случае волны не гасят друг друга и могут существовать бесконечно долго. Стоячая волна может образоваться лишь в том случае, если бегущая волна после отражения от двух противоположных граней куба и прохождения пути  $2L$ , возвращается в исходную точку с фазой, отличающейся от первоначальной на  $2\pi n$ , где  $n$  -

целое. Не ограничивая общности, можно считать, что двукратное отражение от граней либо не вносит в фазу волны каких-либо изменений, либо изменяет фазу на  $2\pi$ . Поэтому условие образования стоячих волн в каждом из измерений куба имеет вид

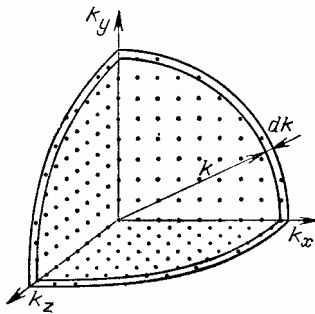
$$k_2L = 2\pi n, \text{ или } k_xL = \pi n_x; k_yL = \pi n_y; k_zL = \pi n_z,$$

где  $n_x, n_y, n_z$  - целые числа. Число волн  $dN$ , волновые числа которых заключены между  $(k_x, k_x+dk_x)$ ,  $(k_y, k_y+dk_y)$ ,  $(k_z, k_z+dk_z)$  равно числу целых чисел, заключенных в интервале  $(n_x, n_x+dn_x)$ ,  $(n_y, n_y+dn_y)$ ,  $(n_z, n_z+dn_z)$ , поэтому



$$dN = dn_x dn_y dn_z = \left(\frac{L}{\pi}\right)^3 dk_x dk_y dk_z.$$

Расчет удобно вести в сферических координатах, считая, что по осям декартовой системы координат отложены  $k_x, k_y$  и  $k_z$ . Поскольку числа  $k_x, k_y$  и  $k_z$  положительны, в сферических координатах число возбужденных колебаний принимает вид



$$dN = dn_x dn_y dn_z = \left(\frac{L}{\pi}\right)^3 \frac{1}{8} 4\pi k^2 dk.$$

Учитывая, что  $k = \omega/c$ , находим концентрацию стоячих волн ( число волн, приходящееся на единицу объема полости):

Рис. 5.6. Число точек, заключенных в 1/8 шарового слоя, равно числу стоячих волн, волновые числа которых лежат в интервале  $dk$

$$\frac{dN}{L^3} = \frac{1}{2} \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3} d\omega.$$

Поскольку электромагнитная волна обладает двумя возможными поляризациями, то полная концентрация стоячих волн в два раза больше и равна

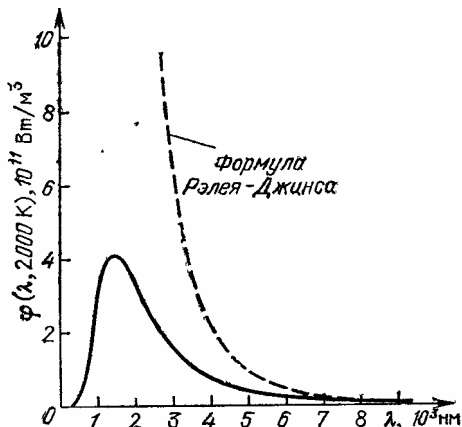
$$\frac{dN_{\text{полн}}}{L^3} = \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3} d\omega.$$

Каждая из стоячих волн называется модой колебаний, а число мод равно числу степеней свободы системы. Если  $\langle \epsilon \rangle$  является средней энергией, приходящейся на одну степень свободы, то плотность энергии стоячих волн равна

$$u(\omega, T) = \frac{dN_{\text{полн}}}{L^3} \langle \epsilon \rangle = \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3} \langle \epsilon \rangle.$$

Таким образом, нахождение  $u(\omega, T)$  свелось к определению средней энергии моды колебаний.

Формула Рэля - Джинса. По теореме о равнораспределении энергии на одну степень



свободы в классической статистической системе приходится энергия  $kT/2$ . У гармонического осциллятора средняя кинетическая энергия равна средней потенциальной, и поэтому его средняя энергия равна  $kT$ . Это энергия, приходящаяся на одну моду колебаний. Поставим этот результат в общую формулу, в результате получим

$$u(\omega, T) = \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3} kT; f(\omega, T) = \frac{\omega^2}{4\pi^2 c^2} kT.$$

Последние равенства называется формулой Рэля-Джинса. Эта формула была предложена Д. У. Рэлеем

(1842—1911) в 1900 г. и несколько более подробно обоснована Д. Д. Джинсом (1877—1946). Она дает достаточно хорошее согласие с экспериментом при малых  $\omega$  (больших  $\lambda$ ). При больших  $\omega$  спектральная плотность значительно превосходит наблюдаемую, а при  $\omega \rightarrow \infty$  получается недопустимое соотношение  $u(\omega, T) \rightarrow \infty$ . Расходимость плотности энергии излучения  $u(\omega, T)$  называется *ультрафиолетовой катастрофой*.

**Формула Вина.** В. Вин (1864—1928) предположил, что каждая мода колебаний является носителем энергии  $\epsilon(\omega)$ , но не все моды данной частоты возбуждены. Относительное число  $\Delta N/N$  возбужденных мод дается распределением Больцмана:

$$\frac{\Delta N}{N} = e^{-\frac{\epsilon(\omega)}{kT}}.$$

Отсюда для средней энергии, приходящейся на моды с частотой  $\omega$ , находим

$$\langle \epsilon \rangle = \epsilon(\omega) e^{-\frac{\epsilon(\omega)}{kT}}.$$

Из общих термодинамических соображений Вин заключил, что энергия моды частотой  $\omega$  пропорциональна частоте, т.е.  $\epsilon(\omega) = \hbar\omega$ . Коэффициент пропорциональности здесь дан в современных обозначениях в виде постоянной Планка, которая в то время не была известна. Общая формула в этом случае приобретает вид

$$u(\omega, T) = \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2 c^3} e^{-\frac{\epsilon(\omega)}{kT}}; \quad f(\omega, T) = \frac{\hbar\omega^3}{4\pi^2 c^2} e^{-\frac{\epsilon(\omega)}{kT}}.$$

Она называется формулой Вина (1896) и дает хорошее согласие с экспериментом в области достаточно больших частот (малых длин волн). Промежуточную область долгое время описать не удавалось.

#### V.14. Формула Планка. Законы Стефана-Больцмана и Вина.

Попытку выйти из положения предпринял Планк (1858-1947). В 1900 он предложил интерполяционную формулу, которая полностью соответствовала экспериментальным данным. При получении ее он предположил, что тела излучают ЭМВ (тепловое излучение) дискретно, в виде квантов с энергией  $\epsilon_0$ . Тогда сама энергия теплового излучения должна быть дискретна и кратна этой величине  $\epsilon_0, 2\epsilon_0, 3\epsilon_0, \dots, n\epsilon_0$ . При этом сами излучательные системы рассматривались как колебательные системы – атомные осцилляторы (АО). Такая система, АО в данный момент с вероятностью

$$P_n = A e^{-\frac{n\epsilon_0}{kT}}$$

находится в одном из состояний с энергией  $n\epsilon_0$ , то есть подчиняются распределению Больцмана по энергии. Средняя излучаемая энергия при этом может быть вычислена по формуле (используем обозначение  $\beta = 1/(kT)$ ):

$$\langle \epsilon \rangle = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} n\epsilon_0 e^{-\frac{n\epsilon_0}{kT}}}{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\frac{n\epsilon_0}{kT}}} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} n\epsilon_0 e^{-n\beta\epsilon_0}}{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\beta\epsilon_0}}.$$

По виду эта формула похожа на логарифмическую производную

$$-\frac{d}{d\beta} \left( \ln \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\beta\epsilon_0} \right) = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} n\epsilon_0 e^{-n\beta\epsilon_0}}{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\beta\epsilon_0}}.$$

Таким образом, необходимо вычислить сумму бесконечной геометрической прогрессии

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\beta\epsilon_0} = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-(n-1)\beta\epsilon_0} = \frac{1}{1 - e^{-\beta\epsilon_0}}.$$

После вычисления логарифмической производной, получаем выражение для вычисления средней энергии АО:

$$\langle \epsilon \rangle = \frac{\epsilon_0}{e^{\frac{\epsilon_0}{kT}} - 1}, \text{ а для излучательной способности АЧТ } f(\omega, T) = \frac{\omega^2}{4\pi^2 c^2} \frac{\epsilon_0}{e^{\frac{\epsilon_0}{kT}} - 1}.$$

И вот теперь Планк предположил, что энергия кванта пропорциональна частоте  $\omega$ , то есть  $\epsilon_0 = \hbar\omega$ . Постоянный коэффициент в этой формуле получил название постоянной Планка. Формула для излучательной способности АЧТ приобрела окончательный вид:

$$f(\omega, T) = \frac{\hbar\omega^3}{4\pi^2 c^2} \frac{1}{e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} - 1}.$$

Из сравнения теории и эксперимента было найдено значение постоянной Планка. Оно оказалось равным  $\hbar = 1.05 \cdot 10^{-34}$  Дж·с. Сначала Планк догадался, что формула должна иметь такой вид, и лишь спустя четыре месяца ему удалось вывести эту формулу. Легко показать, что законы Релея-Джинса и Вина входят в эту формулу как ее предельные случаи соответственно малых и больших частот:

$$\frac{\hbar\omega}{kT} \ll 1 \Rightarrow f(\omega, T) = \frac{\hbar\omega^3}{4\pi^2 c^2} \frac{1}{e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} - 1} \cong \frac{\hbar\omega^3}{4\pi^2 c^2} \frac{1}{1 + \frac{\hbar\omega}{kT}} = \frac{\omega^2}{4\pi^2 c^2} kT - \text{Релей-Джинс.}$$

$$\frac{\hbar\omega}{kT} \gg 1 \Rightarrow f(\omega, T) = \frac{\hbar\omega^3}{4\pi^2 c^2} \frac{1}{e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} - 1} \cong \frac{\hbar\omega^3}{4\pi^2 c^2} \frac{1}{e^{\frac{\hbar\omega}{kT}}} = \frac{\hbar\omega^3}{4\pi^2 c^2} e^{-\frac{\hbar\omega}{kT}} - \text{Вин.}$$

**Закон Стефана-Больцмана.** С помощью формулы Планка можно вычислить энергетическую светимость АЧТ. Для этого необходимо вычислить следующий интеграл:

$$R_{\text{ачт}} = \int_0^{\infty} f(\omega, T) d\omega = \frac{\hbar}{4\pi^2 c^2} \int_0^{\infty} \frac{\omega^2 d\omega}{e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} - 1} = \frac{\hbar}{4\pi^2 c^2} \left( \frac{kT}{\hbar} \right)^4 \int_0^{\infty} \frac{x^2 dx}{e^x - 1} = \frac{\hbar}{4\pi^2 c^2} \left( \frac{kT}{\hbar} \right)^4 \frac{\pi^4}{15} = \sigma T^4.$$

Вычислена энергия, излучаемая АЧТ с единицы поверхности в единицу времени. Она пропорциональна четвертой степени абсолютной температуры, что подтверждается экспериментом. Коэффициент  $\sigma$  в этом законе назван постоянной Стефана-Больцмана и равен  $\sigma = 5.67 \cdot 10^{-8}$  Вт/(м<sup>2</sup>К<sup>4</sup>). Ее можно вычислить из приведенной формулы, зная постоянную Планка, или определить из эксперимента. Оба значения получились очень близкими по величине.

**Закон смещения Вина.** Суть закона смещения Вина в том, что экспериментально было обнаружено смещение максимума излучательной способности АЧТ в сторону меньших длин волн при увеличении температуры АЧТ:  $\lambda_m T = b$ . Коэффициент  $b$  был назван постоянной Вина. Для того, чтобы теоретически получить эту формулу, необходимо

записать испускательную способность АЧТ в зависимости от длины волны, а затем определить ее максимум дифференцированием. Прделаем последовательно все вычисления:

$$\varphi(\lambda, T) = \frac{2\pi c}{\lambda^2} f\left(\frac{2\pi c}{\lambda}, T\right) = \left(\frac{2\pi c}{\lambda}\right)^5 \frac{\hbar}{8\pi^3 c^3} \frac{1}{e^{\frac{2\pi c \hbar}{\lambda kT}} - 1} = \left(\frac{kT}{\hbar}\right)^5 \frac{\hbar}{8\pi^3 c^3} \frac{x^5}{e^x - 1}; x = \frac{2\pi c \hbar}{\lambda kT}.$$

Дифференцируя полученное выражение по  $x$ , получаем трансцендентное уравнение:

$$e^{-x} + \frac{x}{5} - 1 = 0.$$

Решая его методом последовательных приближений, находим его решение  $x_m = 4.965$ . Теперь зная значение  $x_m$ , можно получить закон смещения Вина:

$$\lambda_m T = \frac{kx_m}{2\pi c \hbar} = b.$$