

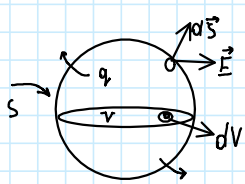
§6. Дивергенция вектора $\vec{E}$

19 февраля 2016 г. 11:28

Теорема Остроградского-Гаусса

уравнение $\text{div } \vec{E}$ (дивергенции)

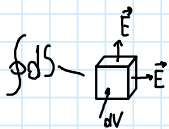
- дивергенция вектора $\vec{E}$
по теореме Гаусса



$$\oint_S \vec{E} d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dV$$

$$\lim_{V \rightarrow 0} \frac{\Phi}{V} = \lim_{V \rightarrow 0} \oint \frac{\vec{E} d\vec{S}}{V} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{\oint d\Phi}{\int dV} = \frac{d\Phi}{dV} = \text{div } \vec{E} d\Phi \text{ — не элементарный поток,}$$

$$a d\Phi = \oint_{dS} \vec{E} \cdot d\vec{S}$$



$$\text{div } \vec{E} = \frac{d\Phi}{dV} \text{ — плотность потока вектора } \vec{E} \text{ через замкнутую поверхность}$$

$$\text{div } \vec{E} = \frac{d\Phi}{dV} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}$$

$$\text{div } \vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}$$

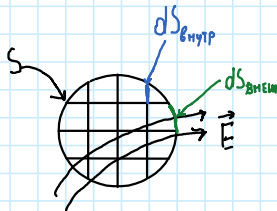
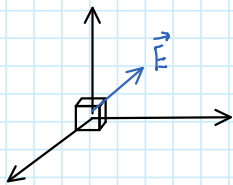
$$(\nabla, \vec{E}) = \left(\frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k} \right);$$

$$(\vec{E}_x \vec{i} + \vec{E}_y \vec{j} + \vec{E}_z \vec{k}) = \left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \right)$$

$$\text{div } \vec{E} = \frac{d\Phi}{dV} = (\nabla, \vec{E})$$

Оператор Набла

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k}$$



- Теорема Остроградского - Гаусса

замкнутая поверхность

$$\text{div } \vec{E} = \frac{d\Phi}{dV}$$

$$d\Phi = \text{div } \vec{E} \cdot dV$$

$$d\Phi_i = \text{div } \vec{E}_i dV_i$$

Проинтегрируем по всем поверхностям объёмчика dV

$$\int_{\Sigma dS} d\Phi = \int \text{div } \vec{E} dV$$

$$\int_{\Sigma dS_{\text{внутр}}} d\Phi + \int_{\Sigma dS_{\text{внеш}}} d\Phi = \int_V \text{div } \vec{E} dV$$

$$\vec{E} \cdot d\vec{S}_i + \vec{E} \cdot d\vec{S}_{i+1} = 0 \quad \left| \Rightarrow \text{поток через внутреннюю поверхность будут компенсировать друг друга:} \right.$$

$$d\vec{S}_i = -d\vec{S}_{i+1}$$

$$\int_{\Sigma dS_{\text{внутр}}} d\Phi = \int_{\Sigma dS_{\text{внутр}}} \vec{E} d\vec{S} = 0$$

$$\int_{\Sigma dS_{\text{внеш}}} d\Phi = \oint_S d\Phi \Rightarrow \oint_S d\Phi = \int_V \text{div } \vec{E} dV \Rightarrow \oint_S \vec{E} d\vec{S} = \int_V \text{div } \vec{E} dV$$

Теорема Остроградского-Гаусса: поток вектора $\vec{E}$ через произвольную замкнутую поверхность равен интегралу от дивергенции того же самого вектора по объёму, ограниченному поверхностью S .

- Уравнение для $\text{div } \vec{E}$.

$$\text{По теореме Гаусса } \oint_S \vec{E} d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dV$$

$$\text{По теореме Остроградского — Гаусса } \oint_S \vec{E} d\vec{S} = \int_V \text{div } \vec{E} dV$$

$$\Rightarrow \int_V \text{div } \vec{E} dV = \int_V \frac{\rho}{\epsilon_0} dV \Rightarrow$$

$$\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

- **Уравнение Пуассона**

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{div} \vec{E} &= \frac{\rho}{\varepsilon_0} \\ \vec{E} &= -\operatorname{grad} \varphi \end{aligned} \right\} \Rightarrow \operatorname{div}(\operatorname{grad} \varphi) = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

Оператор Лапласа $\Delta = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$
--

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k} \right) \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \vec{k} \right) = \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \vec{i} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \vec{j} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \vec{k} \right) = \Delta \varphi \quad (\Delta - \text{оператор Лапласа})$$

$$\Rightarrow \Delta \varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} - \text{уравнение Пуассона}$$

- **Уравнение Лапласа**

если $\rho = 0$ **$\Delta \varphi = 0$**