Министерство общего и профессионального образования
Российской Федерации

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

А.Э. Васильев

ФИЗИКА

ОПТИКА

Учебное пособие

Санкт-Петербург
Издательство СПбГТУ
1999

ВВЕДЕНИЕ

Настоящее учебное пособие является продолжением серии учебных пособий по проведению практических занятий по курсу общей физики для физических специальностей. Опыт использования существующих пособий этого цикла («Классическая механика», «Специальная теория относительности», «Молекулярная физика», «Электростатика и постоянный ток», «Магнетизм», «Колебания и волны») показал их практическую ценность как при подготовке семинарских занятий преподавателями, так и для самостоятельной работы студентов. В данное пособие включен материал, относящийся к различным явлениям оптики, традиционно рассматриваемым в рамках курса общей физики:

1. Интерференция света.
2. Дифракция света.
3. Поляризация света.
4. Дисперсия света.
5. Оптика движущихся источников.
6. Квантовая природа света.

Геометрическая оптика не включена в пособие в связи с тем, что эта тема хорошо рассмотрена в школьной программе.

Рассмотренные в пособии задачи были выбраны из задачника И.Е.Иродова «Задачи по общей физике»[1,2], поскольку уровень сложности этого задачника в наибольшей степени соответствует уровню изучения физики на физических специальностях университетов, и этот задачник традиционно используется при проведении практических занятий на факультетах ФМФ, ФТФ и РФФ. При решении задач авторы опирались на лекционный материал, а, когда это было возможно, включали в текст решений несложные теоретические выводы. Тем самым достигалась необходимая ясность в изложении материала. Кроме того, там, где это было необходимо, обсуждались практические применения данного явления в технике. Каждая задача нумеруется двумя цифрами, разделенными точкой. Первая цифра означает номер занятия, вторая - номер задачи в пределах занятия. В скобках приводится номер задачи по задачнику И.Е.Иродова. Для удобства приводятся номера задач по двум наиболее часто используемым изданиям этого задачника (1979 и 1988 годов издания). Теоретический материал, необходимый для изучения раздела «Оптика», можно найти в широко известных учебниках Д.В.Сивухина [3] и А.Н.Матвеева [4].

<u>ЗАНЯТИЕ 1</u>

<u>Тема занятия:</u> интерференция (часть I)
В предложенных задачах рассматриваются следующие вопросы:
1.1 - условия максимумов и минимумов интенсивности при интерференции
1.2 - получение интерференции методом деления волнового фронта
1.3 - интерференция в параллельных лучах
1.4 - влияние на интерференцию размеров источника
1.5 - интерференция с использованием бипризмы

ЗАДАЧА 1.1 (5.68/5.72)

Неподвижная излучающая система состоит из линейной цепочки параллельных вибраторов, отстоящих друг от друга на расстояние d, причем фаза колебаний вибраторов линейно меняется вдоль цепочки. Найти зависимость от времени разности фаз $\Delta\varphi$ между соседними вибраторами, при которой главный максимум излучения системы будет совершать круговой «обзор» местности с постоянной угловой скоростью ω.

Решение

Главный максимум излучения этой системы будет наблюдаться в тех направлениях, в которых разность фаз колебаний от всех вибраторов равна 0 или кратна 2π. Следовательно, можно записать условие главного максимума в виде

$$\Delta\Phi = \frac{2\pi}{\lambda}\Delta + \Delta\varphi(t) = 2\pi m$$

В этой формуле первое слагаемое дает разность фаз, связанную с разностью хода лучей от двух соседних вибраторов до точки наблюдения в дальнем поле, равной $\Delta = d\cdot\mathrm{Sin}\alpha$, где α - угол, соответствующий направлению на главный максимум, отсчитанный от нормали к линии вибраторов (рис 1.1). Второе слагаемое дает разность фаз между соседними вибраторами, которую необходимо найти.

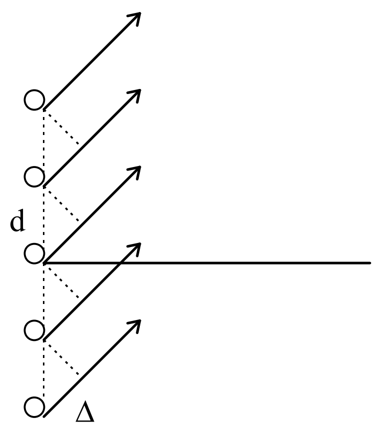

Рис.1.1

Так как направление на главный максимум изменяется с угловой скоростью ω, то

$$\frac{d\alpha}{dt} = \omega \text{ и } \alpha = \omega \cdot t + \alpha_0 ,$$

где α_0 - начальное направление на главный максимум. Окончательно для искомой разности фаз получаем

$$\Delta\varphi(t) = 2\pi\left(m - \frac{d}{\lambda}\mathrm{Sin}(\omega t + \alpha_0)\right).$$

ЗАДАЧА 1.2 (5.69/5.83)

В опыте Ллойда световая волна, исходящая непосредственно из источника S (узкой щели), интерферирует с волной, отраженной от зеркала З. В результате на экране Э образуется система интерференционных полос. Расстояние от источника до экрана L = 100 см. При некотором положении источника ширина интерференционной полосы на экране $\Delta x = 0.25$ мм, а после того как источник отодвинули от плоскости зеркала на $\Delta h = 0.60$ мм, ширина полос уменьшилась в $\eta = 1.5$ раза. Найти длину волны света.

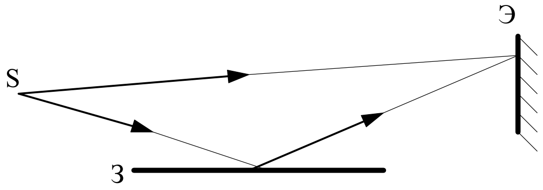

Рис.1.2

Решение

В опыте Ллойда интерферируют две волны - попавшая на экран непосредственно от источника S и отраженная от зеркала. Волну, отраженную от зеркала можно представить как волну, исходящую от источника S' (рис. 1.3). Таким образом мы приходим к схеме Юнга для наблюдения интерференции: два когерентных источника, находящиеся на расстоянии d друг от друга и на расстоянии L от экрана. Поэтому для ширины интерференционной полосы, наблюдающейся на экране, можно использовать формулу

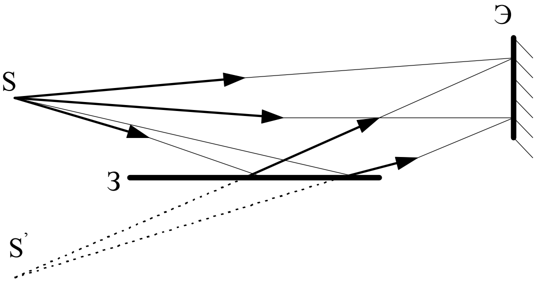

Рис. 1.3

$$\Delta x = \frac{L}{d}\lambda ,$$

полученную для схемы Юнга.

Если источник отодвинуть от плоскости на Δh, то величина d изменится на $2 \cdot \Delta h$ и ширина полосы станет равной

$$\Delta x_1 = \frac{L}{d + 2\Delta h}\lambda$$

Зная, что $\Delta x = \eta \cdot \Delta x_1$, можно найти длину волны, которая оказывается равной

$$\lambda = \frac{2 \cdot \Delta x \cdot \Delta h}{L(\eta - 1)} = 0.6 \text{ мкм.}$$

ЗАДАЧА 1.3 (5.70/5.74)

Две когерентные плоские световые волны, угол между направлениями распространения которых равен $\psi << 1$, падают почти нормально на экран. Амплитуды волн одинаковы. Показать, что расстояние между соседними максимумами на экране $\Delta x = \lambda/\psi$, где λ - длина волны.

Решение

Запишем уравнения двух волн, падающих на экран почти перпендикулярно ему с волновыми векторами $\vec{k}_1$ и $\vec{k}_2$:

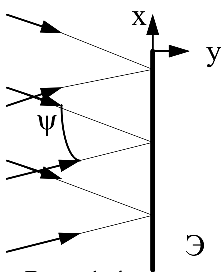

Рис. 1.4

$$\vec{E}_1 = \vec{E}_0 \cdot \mathrm{Cos}(\omega t - \vec{k}_1 \vec{r})$$

$$\vec{E}_2 = \vec{E}_0 \cdot \mathrm{Cos}(\omega t - \vec{k}_2 \vec{r})$$

В этих уравнениях учтено, что по условию задачи направления и амплитуды колебаний вектора $\vec{E}$ в обоих волнах одинаковы. На рис 1.4 изображена схема падения лучей на экран и направления осей координат. Тогда результирующее электрическое поле в точке на экране с координатами (x, y) будет равно

$$E = E_1 + E_2 = E_0 \cdot \mathrm{Cos}\left(\omega t - k \cdot x \cdot \mathrm{Sin}\frac{\psi}{2} - k \cdot y \cdot \mathrm{Cos}\frac{\psi}{2}\right) +$$

$$E_0 \cdot \mathrm{Cos}\left(\omega t + k \cdot x \cdot \mathrm{Sin}\frac{\psi}{2} - k \cdot y \cdot \mathrm{Cos}\frac{\psi}{2}\right) =$$

$$= 2 \cdot E_0 \cdot \mathrm{Cos}\left(k \cdot x \cdot \mathrm{Sin}\frac{\psi}{2}\right) \cdot \mathrm{Cos}\left(\omega t - k \cdot y \cdot \mathrm{Cos}\frac{\psi}{2}\right)$$

Эта волна будет иметь максимальную амплитуду колебаний вектора электрического поля в точках, в которых выполняется условие

$$k \cdot x \cdot \mathrm{Sin}\frac{\psi}{2} = \pm m\pi$$

Тогда координаты точек экрана с максимальной освещенностью будут равны

$$x_m = \pm\frac{m\pi}{k \cdot \mathrm{Sin}\frac{\psi}{2}} = \pm\frac{m\lambda}{2 \cdot \mathrm{Sin}\frac{\psi}{2}}$$

Расстояние между соседними максимумами не будет зависеть от их номера и равно (учтем, что по условию $\psi << 1$)

$$\Delta x = x_{m+1} - x_m = \frac{\lambda}{2 \cdot \mathrm{Sin}\frac{\psi}{2}} \approx \frac{\lambda}{\psi}.$$

Такая интерференция называется интерференцией в параллельных лучах.

ЗАДАЧА 1.4 (5.71/5.75)

На рис. 1.5 показана интерференционная схема с бизеркалами Френеля. Угол между зеркалами $\alpha = 12'$, расстояния от линии пересечения зеркал до узкой щели S и экрана Э равны соответственно r = 10.0 см и b = 130 см. Длина волны $\lambda = 0.55$ мкм. Определить:

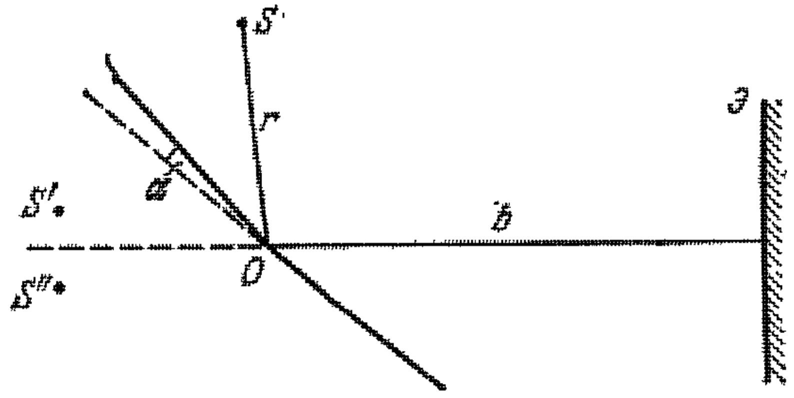

Рис.1.5

а) ширину интерференционной полосы на экране и число возможных максимумов;

б) сдвиг интерференционной картины на экране при смещении щели на $\delta L = 1.0$ мм по дуге радиуса r с центром в точке O;

в) при какой максимальной ширине щели $\delta_{МАКС}$ интерференционные полосы на экране будут наблюдаться еще достаточно отчетливо?

Решение

Бизеркала Френеля используются для получения интерференции от одного источника света (например, раскаленной нити) методом деления волнового фронта на две приблизительно равные части. Действительно, свет после отражения от зеркал распространяется так, будто он вышел из двух когерентных источников S_1 и S_2 , являющихся мнимыми изображениями источника. Так как угол между зеркалами мал, то мало и расстояние между мнимыми изображениями источника, что дает необходимое условие когерентности интерферирующих волн.

А) Получим формулу для ширины интерференционной полосы. В точку на экране, определяющуюся координатой x, волны от источников S_1 и S_2 дойдут, пройдя в воздухе расстояния соответственно

$$L_1 = \sqrt{(r+b)^2 + (x - \frac{d}{2})^2}; L_2 = \sqrt{(r+b)^2 + (x + \frac{d}{2})^2}.$$

Если разность хода лучей L_2 - L_1 будет равна целому числу длин волн, то в этой точке экрана будет максимум освещенности. Исходя из этого получаем формулу, определяющую положение максимумов:

$x_m = \frac{r+b}{d}\lambda m$, где m = 0, ±1, ±2, ±3.....- порядок максимума, d - расстояние между источниками S_1 и S_2. Расстояние между соседними максимумами и дает ширину интерференционной полосы, равную

$$\Delta x = \frac{r+b}{d}\lambda$$

Величину d с учетом малости угла α между зеркалами можно записать в виде $d = 2 \cdot r \cdot \mathrm{Sin}\alpha \approx 2 \cdot r \cdot \alpha$. Подставляя данные в условии задачи значения входящих в формулу величин, получаем

$$\Delta x = \frac{r+b}{2r\alpha}\lambda = 1.1 \text{ мм}.$$

Интерференция на экране будет наблюдаться лишь в области перекрытия волн, отраженных от бизеркала. На рис. 1.6 эта область ограничена

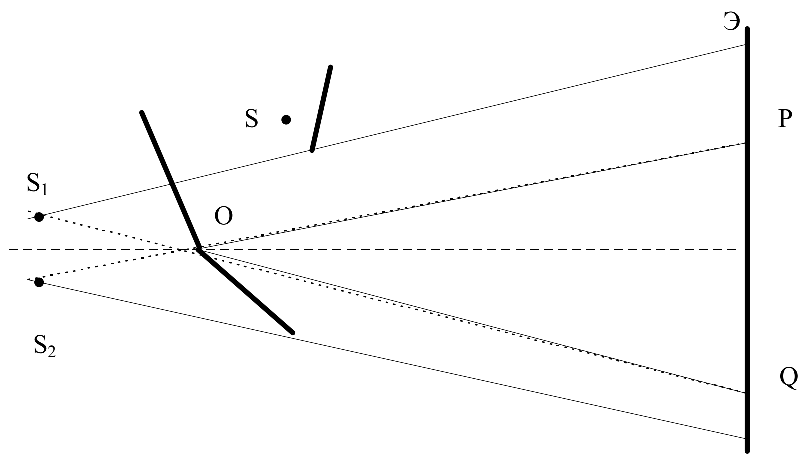

Рис. 1.6

точками P и Q. Зная ширину интерференционной полосы и найдя из подобия треугольников S_1OS_2 и POQ длину отрезка PQ, можно определить максимально возможное число интерференционных полос на экране:

$$N = \frac{PQ}{\Delta x} = \frac{2b\alpha}{\Delta x} = \frac{4br\alpha^2}{\lambda(r+b)} = 9.$$

Отметим, что на экране может наблюдаться и меньшее число полос. Это связано с длиной когерентности волны, испускаемой источником S.

Б) При смещении щели S по дуге радиуса r с центром в точке O на δL оба мнимых изображения этого источника сместятся на то же расстояние по кругу в ту же сторону и займут положения S_{12} и S_{22}. Поэтому вся интерференционная картина сместится по экрану на расстояние, которое можно будет определить из подобия треугольников $S_{12}OS_{22}$ и O_2OO_1 :

$\frac{\delta L}{r} = \frac{\delta x}{b}$, поэтому $\delta x = \frac{b}{r}\delta L$.

В) Ширина щели определяет размер источника. Если он протяженный, то интерференционные картины, полученные от *краев* щели как от самостоятельных источников, могут гасить друг друга. В результате в этом случае светлая полоса одной интерференционной картины наложится на темную полосу другой и на экране получится почти равномерная засветка. Края щели можно считать отдельными источниками, смещенными друг от друга на расстояние δ. Используя результат пункта б) этой задачи, можно сказать, что интерференционные картины от этих двух источников будут сдвинуты на расстояние δx друг относительно друга. Если $\delta x \le \Delta x/2$, то интерференционная картина еще будет резкой. Поэтому максимальный размер щели будет равен

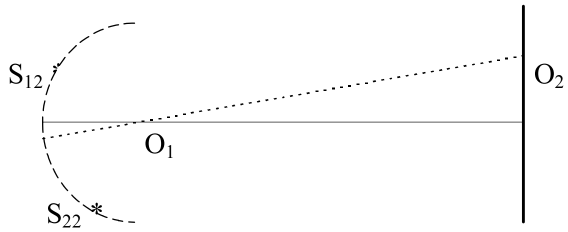

Рис. 1.7

$$\delta_{MAX} = \frac{r+b}{r} \cdot \frac{\lambda}{4\alpha} = 43 \text{ мкм}.$$

ЗАДАЧА 1.5 (5.75/5.79)

Плоская световая волна с $\lambda = 0.70$ мкм падает нормально на основание бипризмы , сделанной из стекла (показатель преломления $n = 1.520$) с преломляющим углом $\theta = 5.0^0$. За бипризмой (рис. 1.8) находится плоскопараллельная стеклянная пластинка, и пространство между ними заполнено бензолом ($n' = 1.500$)

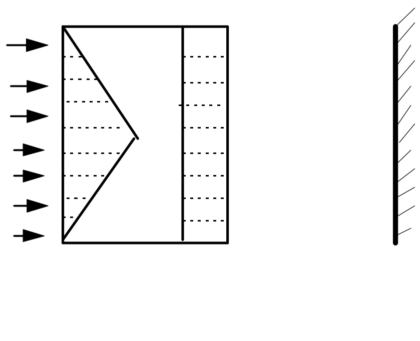
Рис.1.8

. Найти ширину интерференционной картины на экране Э, расположенном за этой системой.

Решение

Из геометрической оптики известно, что призма с малым преломляющим углом отклоняет луч света, падающий на нее, на угол, равный $\varphi = (n - n')\theta$, где n и n' - показатели преломления стекла и бензола, а углы φ и θ изображены на рис. 1.9. Таким образом, после бипризмы плоская световая волна разделится на два потока: две плоские волны пересекающие друг друга под углом 2φ. Этот угол очень мал, так как $(n - n') \ll n$. Поэтому можно считать, что эти две волны падают на плоскопараллельную пластинку практически нормально к ней. В этом случае пластинка практически не влияет на ход лучей. Далее воспользуемся результатом задачи 1.3, который дает ширину интерференционной полосы при интерференции в параллельных лучах:

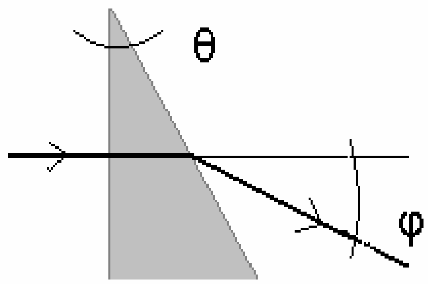

Рис.1.9

$$\Delta x = \frac{\lambda}{2\varphi} = \frac{\lambda}{2(n - n')}.$$

В результате $\Delta x = 0.2$ мм.

Задачи, рекомендуемые по этой теме для домашнего задания:
5.65/5.66, 5.67/5.68, 5.72/5.76, 5.73/5.77, 5.74/5.78

ЗАНЯТИЕ 2

Тема занятия: интерференция (часть II)
В предложенных задачах рассматриваются следующие вопросы:
2.1 - использование интерференции для определения показателя преломления вещества;
2.2 - просветление оптики (интерференция в тонких пленках);
2.3 - интерференция рассеянного света;
2.4 - интерференция на клине, влияние немонохроматичности источника;
2.5 - кольца Ньютона.

ЗАДАЧА 2.1 (5.77/5.81)

На рис. 2.1 показана схема интерферометра, служащего для измерения показателей преломления прозрачных веществ. Здесь S - узкая щель, освещаемая монохроматическим светом λ = 589 нм; 1 и 2 - две одинаковые трубки с воздухом, длина каждой из которых L = 10.0 см; Д - диафрагма с двумя щелями. Когда воздух в трубке 1 заменили аммиаком, то интерференционная картина на экране Э сместилась вверх на N = 17 полос. Показатель преломления воздуха n = 1.000277. Определить показатель преломления аммиака.

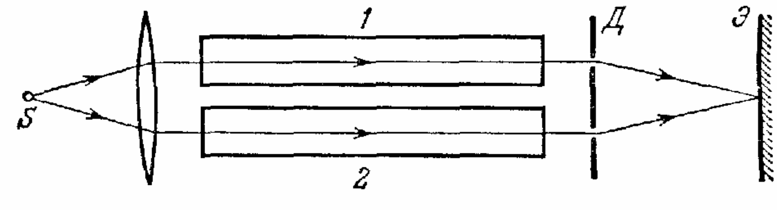

Рис. 2.1

Решение

В силу того, что в любую точку экрана приходят две когерентные волны от щелей в диафрагме, то в этой точке происходит их интерференция. Результат интерференции зависит от оптической разности хода этих двух волн $\Delta = L_2 - L_1$. Если эта разность хода равна целому числу длин волн, то в окрестности точки P будет светлая полоса, если полуцелому, то темная полоса. Если рассматриваемая точка P находится в центре экрана, то в случае, когда одинаковые трубки заполнены воздухом, в этой точке будет светлая полоса. Положение остальных светлых полос находится из условия
$\Delta = к \cdot \lambda$, где к = $\pm$ 1, $\pm$ 2, $\pm$ 3,... (центру экрана соответствует к = 0). Замена воздуха аммиаком в трубке 2 изменяет оптическую длину пути L_2 на величину $\delta = n' \cdot l - n \cdot l$, на столько же изменяется и Δ. При замене воздуха аммиаком, величина Δ непрерывно изменялась и в точке P на экране сменяли

друг друга светлые и темные интерференционные полосы. Смещение интерференционной картины по экрану на одну полосу соответствует изменению к на единицу (разность хода изменяется на λ). При смещении интерференционной картины на N полос разность хода изменяется на $N\cdot\lambda$. Если показатель преломления аммиака больше показателя преломления воздуха, то $\delta > 0$ и интерференционная картина смещается вверх. Тогда условие для нахождения n' приобретает вид

$$n'\cdot l - n\cdot l = N\cdot\lambda \quad \text{и} \quad n' = n + N\cdot\frac{\lambda}{l} = 1.00039.$$

ЗАДАЧА 2.2 (5.81/5.85)

Для уменьшения потерь света из - за отражения от поверхности стекла последнее покрывают тонким слоем вещества с показателем преломления $n' = \sqrt{n}$, где n - показатель преломления стекла. В этом случае амплитуды световых колебаний, отраженных от обеих поверхностей такого слоя, будут одинаковыми. При какой толщине этого слоя отражательная способность стекла в направлении нормали будет равна нулю для света с длиной λ.

Решение

Прежде чем приступать к решению этой задачи, получим заданное условие. Проблема потерь светового потока возникает при создании оптических систем с большим количеством отражений. Поэтому на каждую отражающую поверхность наносится тонкий (порядка длины волны оптического диапазона) слой прозрачного диэлектрика. Пусть показатель преломления стекла n, а диэлектрика n'. Тогда, в соответствии с формулами Френеля для случая нормального падения света на такую систему, электрическое поле отраженной от нижней границы пленка - стекло и прошедшей через неё волн могут быть получены из соотношений

$$E_{ОТР2} = \frac{n' - n}{n' + n}E_0 \quad ; \; E_{ПРОШ2} = \frac{2\cdot n'}{n' + n}E_0 .$$

Аналогичные формулы для отраженной волны от границы воздух - стекло и прошедшей через неё, запишем так

$$E_{ОТР1} = \frac{1 - n'}{1 + n'}E_0 \quad ; \quad E_{ПРОШ1} = \frac{2}{1 + n'}E_0 .$$

Наибольшее ослабление отраженной от всей системы волны будет, если $E_{ОТР1} = E_{ОТР2}$. Дело в том, что при выборе толщины пленки соответствующей условию $n\cdot d = \frac{\lambda}{4} + k\cdot\lambda; k = 0,1,2,\ldots,$ эти волны будут равны по

амплитуде и находиться в противофазе, что обеспечит коэффициент отражения $\rho = 0$. Проведя соответствующие вычисления, получаем заданное условие $n' = \sqrt{n}$.
Теперь переходим к нахождению необходимой толщины пленки. Так как условия отражения от нижней и верхней поверхности диэлектрика одинаковы (нет потери полуволны), то условие минимального отражения выглядит так (Δ - оптическая разность хода):
$\Delta = 2 \cdot n' \cdot d = (2 \cdot k + 1) \cdot \frac{\lambda}{2}$, откуда толщина пленки $d = \frac{\lambda}{4\sqrt{n}}(2k+1)$,
где к = 0, 1, 2, ...
В качестве примера возьмем стекло с $n = 1.53$ (баритовый флинт). Для этого случая коэффициент отражения для $\lambda = 0.6$ мкм равен $\rho = 0.04$. Если же покрыть стекло слоем NaF с показателем преломления $n = 1.33$, то условие $n' = \sqrt{n}$ будет практически соблюдено, и коэффициент отражения станет равным 0.008.

ЗАДАЧА 2.3 (5.82/5.86)

Рассеянный монохроматический свет с $\lambda = 0.60$ мкм падает на тонкую пленку вещества с показателем преломления $n = 1.5$. Определить толщину пленки, если угловое расстояние между соседними максимумами, наблюдаемыми в отраженном свете под углами с нормалью, близкими к $\theta = 45^0$, равно $\delta\theta = 3.0^0$.

Решение

Рассеянным называется свет, в котором направления распространения световых пучков (лучей) различны. Такой свет, отражаясь от плоскопараллельной пластинки (пленки) , будет создавать за счет интерференции *полосы равного наклона* как в отраженном, так и в прошедшем свете. Схема возникновения полос равного наклона изображена на рисунке 2.2. Все лучи, падающие на пластинку под определенным углом θ, соберутся на экране в одной точке P. Лучи другого наклона, например, луч S_1 , соберутся в другой точке экрана P_1 . Каждому углу падения соответствует своя полоса равного наклона, локализованная на бесконечности. Условие того, что под углом θ отраженный свет будет иметь максимальную интенсивность, приобретет такой вид:

$$2d\sqrt{n^2 - \mathrm{Sin}^2\theta} = \left(k + \frac{1}{2}\right)\lambda,$$

где d - толщина пленки, n - её показатель преломления, к - номер максимума. Тогда условия максимумов в отраженном свете для углов

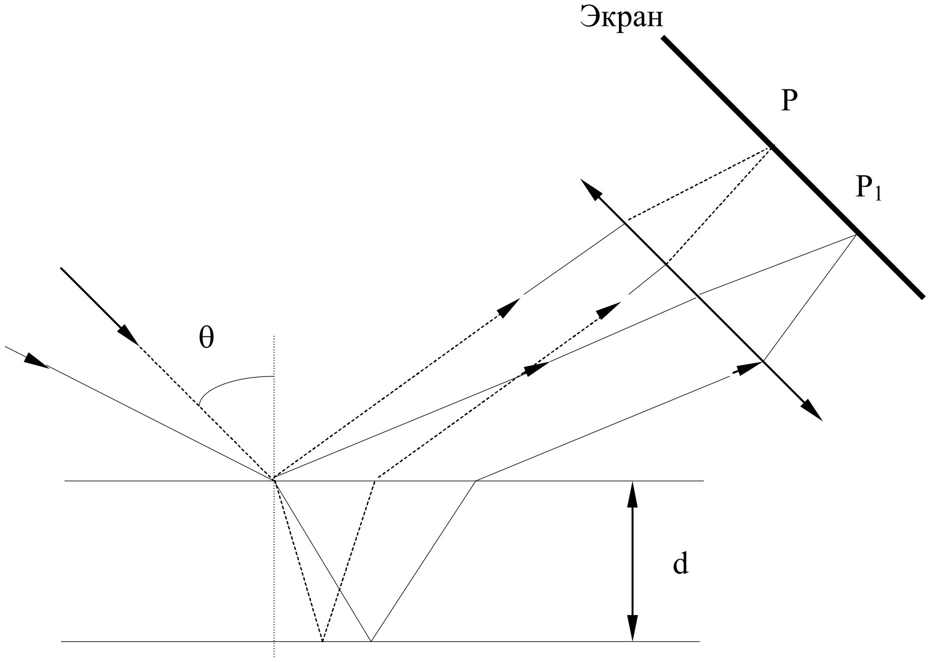

Рис. 2.2

$\theta_1 = \theta - \delta\theta/2$ и $\theta_2 = \theta + \delta\theta/2$ запишутся в виде

$$2d\sqrt{n^2 - \mathrm{Sin}^2\theta_1} = \left(k_1 + \frac{1}{2}\right)\lambda, \quad 2d\sqrt{n^2 - \mathrm{Sin}^2\theta_2} = \left(k_2 + \frac{1}{2}\right)\lambda.$$

По условию задачи, $k_2 = k_1 - 1$. Таким образом, мы получаем систему трех уравнений с тремя неизвестными - k_1 , k_2 и d . После несложных, но утомительных преобразований, получаем искомую толщину пленки:

$$d = \frac{\lambda\sqrt{n^2 - \mathrm{Sin}^2\theta}}{\delta\theta \cdot \mathrm{Sin}(2\theta)} = 15 \text{ мкм}.$$

Этот способ определения толщины пленки используется на практике. К его преимуществам относится то, что источник света может быть достаточно протяженный и ограничения накладываются лишь на монохроматичность излучения. Регистрация отраженного света тоже не вызывает больших проблем.

ЗАДАЧА 2.4 (5.85/5.89)

Свет с длиной волны $\lambda = 0.55$ мкм от удаленного точечного источника падает нормально на поверхность стеклянного клина. В отраженном свете наблюдают систему интерференционных полос, расстояние между соседними максимумами которых на поверхности клина $\Delta x = 0.21$ мм. Найти:

а) угол между гранями клина;

б) степень монохроматичности света ($\Delta\lambda/\lambda$), если исчезновение интерференционных полос наблюдается на расстоянии $L \approx 1.5$ см от вершины клина.

Решение

а) На клин падает плоская волна, два луча из которой обозначим как A_1 и A_2 . По условию задачи, волна падает на клин перпендикулярно поверхности. Один из вариантов дальнейшего хода лучей изображен на рис. 2.3. Луч A_1 частично отражается от верхней поверхности, частично проходит в клин и отражается от нижней его поверхности. Далее он преломляется на верхней грани и выходит обратно в воздух, где и встречается с лучом A_2, отраженным от верхней поверхности клина. В данном случае интерференция происходит на верхней поверхности клина, на которой образуются *полосы равной толщины*. Обычно для наблюдения интерференции используется клин с малым углом при вершине (порядка нескольких угловых минут). Поэтому для расчета максимумов и минимумов интенсивности в отраженном свете можно использовать формулу для плоскопараллельной пластинки, а в качестве толщины этой пластинки использовать толщину клина в данном месте (на рис.2.3 в точке О). Тогда условие светлых полос в отраженном свете запишется так:

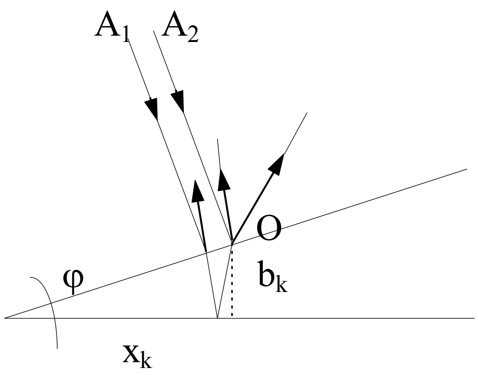

Рис.2.3

$$2b_k\sqrt{n^2 - \mathrm{Sin}^2\theta} - \frac{\lambda}{2} = k \cdot \lambda,$$

где b_k - толщина клина, n - показатель преломления материала клина (в данном случае n = 1.5), $\theta = 0$ - нормальное падение, k - номер светлой полосы (отсчет идет от вершины клина). Толщину клина b_k можно выразить через преломляющий угол клина φ : $b_k = x_k \cdot \mathrm{tg}\varphi$. Если преломляющий угол клина мал, то $b_k = x_k \cdot \varphi$. Тогда координата x_k k - той светлой полосы будет равна

$$x_k = \frac{\lambda}{4n\varphi}\left(2k + 1\right),$$

а ее ширина

$$\Delta x = x_{k+1} - x_k = \frac{\lambda}{2n\varphi}.$$

Тогда преломляющий угол клина

$\varphi = \dfrac{\lambda}{2 \cdot n \cdot \Delta x} = 0.87 \cdot 10^{-3}$ рад , а в градусах угол при вершине клина будет равен φ = 3' . Таким образом угол φ удовлетворяет предположениям, сделанным при его нахождении.

б) Картина чередования светлых и темных полос на поверхности, строго говоря, будет наблюдаться на всем клине только в случае точно монохроматической волны. Если же волна не строго монохроматична, а оценивается величиной Δλ (интервалом длин волн, в котором сосредоточено излучение), то интерференционные картины для разных λ могут накладываться друг на друга, и, начиная с некоторой точки на поверхности клина, интерференционные полосы исчезают, заменяясь почти равномерной засветкой. Это происходит тогда, когда максимум освещенности для длины волны λ+Δλ с номером m накладывается на максимум для длины волны λ с номером (m+1). Тогда

$$x_m = \frac{\lambda + \Delta\lambda}{4n\varphi}(2m+1) = x_{m+1} = \frac{\lambda}{4n\varphi}(2(m+1)+1),$$ откуда

$$2m + 1 = \frac{2 \cdot \lambda}{\Delta\lambda}.$$

По условию задачи $x_m = L$, тогда

$$L = \frac{\lambda}{4n\varphi}(2m+1) = \frac{\Delta x}{2} \cdot \frac{2 \cdot \lambda}{\Delta\lambda}.$$

Искомая степень монохроматичности падающего света получается равной

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{\Delta x}{L} = 0.014.$$

ЗАДАЧА 2.5 (5.92/5.96)

Сферическая поверхность плоско-выпуклой линзы соприкасается со стеклянной пластинкой. Пространство между линзой и пластинкой заполнено сероуглеродом. Показатели преломления линзы, сероуглерода и пластинки равны соответственно $n_1 = 1.50$, $n_2 = 1.63$ и $n_3 = 1.70$. Радиус кривизны сферической поверхности линзы R = 100 см. Определить радиус пятого темного кольца Ньютона в отраженном свете с λ = 0.50 мкм.

Решение

Наиболее ярким примером появления полос равной толщины при интерференции являются кольца Ньютона. Впервые такие кольцевые интерференционные полосы, возникавшие в воздушном слое между плосковыпуклой линзой и плоской стеклянной пластинкой, наблюдал Юнг. Ньютон же установил связь между радиусом колец и кривизной линзы. Получим эту формулу для радиусов темных колец, наблюдаемых в отраженном свете. Ход лучей изображен на рис.2.4. Из него ясно, что интерференция происходит на нижней поверхности линзы. Разность хода лучей, отраженных от нижней поверхности линзы и от верхней плоскости пластинки, Δ, равна

$$\Delta = 2 \cdot d \cdot n_2 + \frac{\lambda}{2},$$

где $n_2 = 1$ - показатель преломления воздуха, а d - толщина воздушной прослойки. Появление слагаемого $\left(+\frac{\lambda}{2}\right)$ связано с потерей полуволны при отражении от оптически более плотной среды (пластинки). Если $\Delta = (2k+1)\frac{\lambda}{2}$, то полоса будет темной.

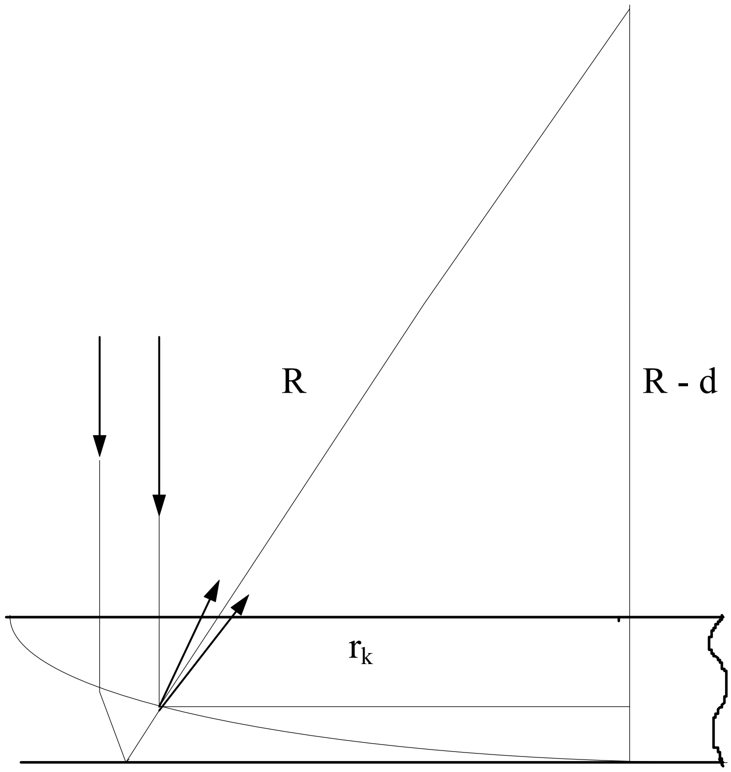

Рис.2.4

Величину d можно найти из уравнения (см. рис.3.9): $R^2 = r_k^2 + (R-d)^2$,

где r_k - радиус k - того темного кольца в отраженном свете. Тогда $d = \frac{r_k^2}{2R}$.

Теперь запишем окончательный результат для темных колец в отраженном свете для воздушной прослойки: $r_k^{\text{ТЕМН}} = \sqrt{\frac{\lambda R k}{n_2}}$, где k = 1,2,...

В нашем случае воздушная прослойка заменена сероуглеродом. Такой эксперимент тоже впервые поставил Юнг. Он наблюдал картину, которая отличалась от интерференционной картины в случае воздушного промежутка. Дело в том, что в случае сероуглерода условия отражения световых волн от линзы и пластинки одинаковы ($n_1 < n_2 < n_3$) и дополнительные $\lambda/2$ не возникают. Следовательно, формула для радиуса темных колец в отраженном свете видоизменяется:

$$r_k^{\text{ТЕМН}} = \sqrt{\frac{\lambda R}{n_2}\left(k + \frac{1}{2}\right)}.$$

Для пятого темного кольца $r_5 = 1.3$ мм.

Задачи, рекомендуемые по этой теме в качестве домашнего задания: 5.76/5.80, 5.80/5.84, 5.84/5.88, 5.90/5.94, 5.93/5.97

ЗАНЯТИЕ 3

Тема занятия: дифракция (часть I).
В предложенных задачах рассматриваются следующие вопросы:
3.1 - закон сохранения энергии в оптике;
3.2 - спираль Френеля;
3.3 - дифракция на сложных прозрачных объектах;
3.4 - дифракция на круглом диске.

ЗАДАЧА 3.1 (5.97/5.101)

Плоская световая волна падает нормально на диафрагму с круглым отверстием, которое закрывает первые N зон Френеля - для точки P на экране, отстоящем от диафрагмы на расстояние b. Длина волны света λ. Найти интенсивность света I_0 перед диафрагмой, если известно распределение интенсивности света на экране I(r), где r - расстояние до точки P.

Решение

Суть дифракции (как, впрочем, и интерференции) в перераспределении энергии, которую несут электромагнитные волны, по волновому фронту в результате их сложения. При этом, естественно, выполняются законы сохранения энергии, импульса и момента импульса. В данном случае это значит, что вся энергия, которая проходит через диафрагму, попадает на экран. Поэтому, энергия, проходящая через диафрагму в единицу времени, равна

$$I_0 \frac{\pi d_N^2}{4} = \int_0^\infty I(r)\,dS\ ,$$

где dS - площадь той части экрана, где интенсивность падающего света одинакова и равна I(r): $dS = 2\cdot\pi\cdot r\cdot dr$. Используя формулу для радиуса N - ой зоны Френеля для плоской волны,

$d_N = 2\sqrt{Nb\lambda}$, получаем окончательный ответ:

$$I_0 = \frac{2}{Nb\lambda}\int_0^\infty I(r)\,r\,dr\ .$$

ЗАДАЧА 3.2 (5.100/5.105)

Плоская монохроматическая световая волна с интенсивностью I_0 падает нормально на непрозрачный экран с круглым отверстием. Какова интенсивность света I за экраном в точке, для которой отверстие:

а) равно первой зоне Френеля; внутренней половине первой зоны;
б) сделали равным первой зоне Френеля и затем закрыли его половину (по диаметру)?

Решение

Для решения этой задачи воспользуемся спиралью Френеля.

А) Для случая, когда открыта одна зона Френеля, построение Френеля выглядит так, как изображено на рис. 3.3. Вектор $\mathbf{E_1}$ по модулю в два раза больше, чем вектор $\mathbf{E_0}$, соответствующий электрическому полю падающей на отверстие волны.

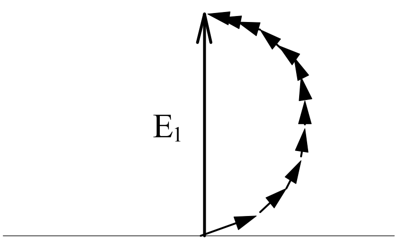

Рис. 3.3

Следовательно, $E_1 = 2 \cdot E_0$ и $I_1 = 4 \cdot I_0$, так как амплитуда напряженности электрического поля и интенсивность световой волны связаны соотношением $I = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}E^2$. Для случая, когда открыта внутренняя половина зоны Френеля, построение Френеля изображено на рис. 3.4 и $E_{1/2} = \sqrt{2} \cdot E_0$.

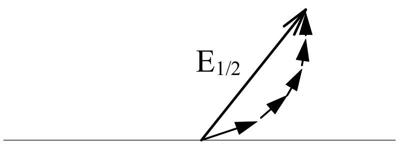

Рис. 3.4

Следовательно, интенсивность света за экраном $I_{1/2} = 2 \cdot I_0$.

Б) Теперь рассмотрим случай, когда закрыта половина первой зоны Френеля по диаметру (например, левая). По принципу Гюйгенса - Френеля вектор электрического поля электромагнитной волны от части открытого волнового фронта прямо пропорционален площади открытой его части ($dE \sim dS$). Значит, можно считать, что если от целой зоны электрическое поле в точке наблюдения будет равно $E_1 = 2 \cdot E_0$, то от половины по площади напряженность электрического поля будет в два раза меньше и

$$E_{1/2S} = \frac{1}{2}E_1 = E_0 \text{ , } I_{1/2S} = I_0 .$$

ЗАДАЧА 3.3 (5.103/5.108)

Плоская световая волна с $\lambda = 0.60$ мкм падает нормально на достаточно большую стеклянную пластинку, на противоположной стороне которой сделана круглая выемка (рис 3.5). Для точки наблюдения P она представляет собой первые полторы зоны Френеля. Найти глубину h выемки, при которой интенсивность света в точке P будет:

а) максимальной;

б) минимальной;

в) равной интенсивности падающего света.

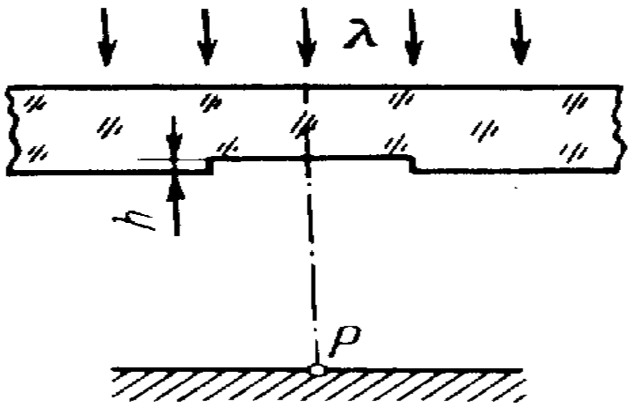

Рис. 3.5

Решение

Разделим волновую поверхность, находящуюся на нижней кромке стеклянной пластинки на две части: часть, соответствующую полутора зонам Френеля, и все остальное. Если пластинки нет, то вектора электрических полей от этих двух частей волновой поверхности в точке P будут складываться как показано на рис. 3.6. В результате сложения получится вектор $\mathbf{E_0}$. Если же на пути волны помещена пластинка с выемкой, то часть волнового фронта, соответствующая полутора зонам Френеля, отрезок пути (а именно, расстояние h) будет проходить в воздухе. При этом она будет опережать по фазе волну, идущую от остальной части волнового фронта. Спираль Френеля устроена так, что опережение по фазе соответствует повороту вектора $E_{1\frac{1}{2}}$ по часовой стрелке на угол,

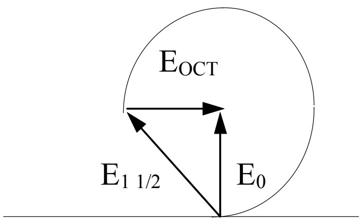

Рис. 3.6

пропорциональный h. Для того, чтобы в точке P был максимум освещенности, необходимо, чтобы этот вектор повернулся на угол $\frac{3}{4}\pi$ и стал сонаправлен с вектором $E_{ост}$. Соответственно, для минимальной освещенности точки P угол поворота должен быть $\frac{7}{4}\pi$. Чтобы освещенность осталась той же угол поворота должен быть равен $\frac{3}{2}\pi$. Поэтому глубину выемки, необходимую для выполнения условий задачи, можно найти из уравнений:

$$\frac{2\pi}{\lambda} h\cdot(n-1)=\frac{3}{4}\pi+2\cdot\pi\cdot m;\ m=0,1,2,\ldots$$

$$\frac{2\pi}{\lambda} h\cdot(n-1)=\frac{7}{4}\pi+2\cdot\pi\cdot m;\ m=0,1,2,\ldots$$

$$\frac{2\pi}{\lambda} h\cdot(n-1)=\frac{3}{2}\pi+2\cdot\pi\cdot m;\ m=0,1,2,\ldots$$

Итак, глубины выемок для случаев максимальной, минимальной и исходной освещенностей в точке Р, равны, соответственно,

$$h_{MAX}=\left(\frac{3}{8}+m\right)\frac{\lambda}{n-1}=1.2\left(\frac{3}{8}+m\right)\text{ мкм}$$

$$h_{MIN}=\left(\frac{7}{8}+m\right)\frac{\lambda}{n-1}=1.2\left(\frac{7}{8}+m\right)\text{ мкм}$$

$$h_{ИСХ}=\left(\frac{3}{4}+m\right)\frac{\lambda}{n-1}=1.2\left(\frac{3}{4}+m\right)\text{ мкм.}$$

В последнем случае можно повернуть вектор $E_{1\frac{1}{2}}$ на угол $2\pi m$ (m = 0,1,2,...) и получить тот же результат.

ЗАДАЧА 3.5 (5.105/5.110)

Плоская световая волна с λ = 0.57 мкм падает нормально на поверхность стеклянного клина (n = 1.60) диска, который закрывает полторы зоны Френеля для точки наблюдения Р. При какой минимальной толщине этого диска интенсивность света в точке Р будет максимальной?

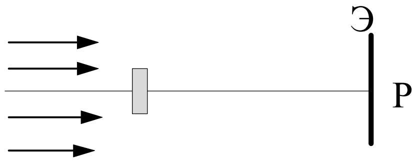

Рис.3.7

Решение

Интенсивность волны в точке Р (рис.3.7) можно определить с помощью спирали Френеля. Разделим волновой фронт на две части: ту, которая закрыта диском, и все остальное. Взаимное расположение векторов электрического поля в точке Р от этих частей волнового фронта изображено на рис.3.6. E_0 на

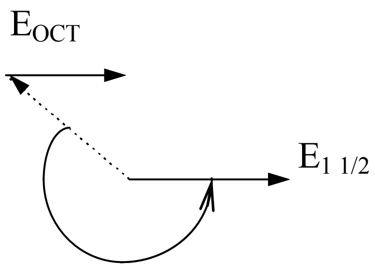

Рис.3.8

рисунке - это величина электрического поля в точке P, когда диска нет. По отношению к вектору $\mathbf{E}_{OCT}$ волне, прошедшей через диск, необходимо дополнительное время для прохождения диска (скорость волны в стекле меньше, чем в воздухе). Следовательно, вектор $E_{1\frac{1}{2}}$ будет отставать по фазе, что соответствует повороту его против часовой стрелки на угол, пропорциональный толщине диска. Для достижения максимальной освещенности точки P необходимо, чтобы вектора $\mathbf{E}_{OCT}$ и $E_{1\frac{1}{2}}$ были параллельны друг другу. Это достигается в случае, если дополнительный набег фазы будет равен $5\cdot\pi/4 + 2\pi k$; $k = 0, 1, 2,..$ Соответствующее этому случаю расположение векторов изображено на рис.3.8. Минимальную толщину стеклянного диска можно теперь найти из уравнения:

$$\frac{2\pi}{\lambda} d\cdot(n-1) = \frac{5}{4}\pi + 2\cdot\pi\cdot k; k = 0,1,2,\ldots \ .$$

Окончательно получаем:

$$d = \frac{5}{8}\frac{\lambda}{n-1} = 0.59 \text{ мкм.}$$

Задачи, рекомендуемые по этой теме в качестве домашнего задания:
5.99/5.103, 5.102/5.107, 5.104/5.109, 5.107/5.112, 5.109/5.114

ЗАНЯТИЕ 4

Тема занятия: дифракция (часть II)
В предложенных задачах рассматриваются следующие вопросы:
4.1 - использование спирали Корню при изучении дифракции;
4.2 - совместное использование спиралей Френеля и Корню;
4.3 - дифракционная решетка;
4.4 - особенности дифракционной картины, создаваемой дифракционной решеткой;
4.5 - дифракционная решетка как спектральный прибор.

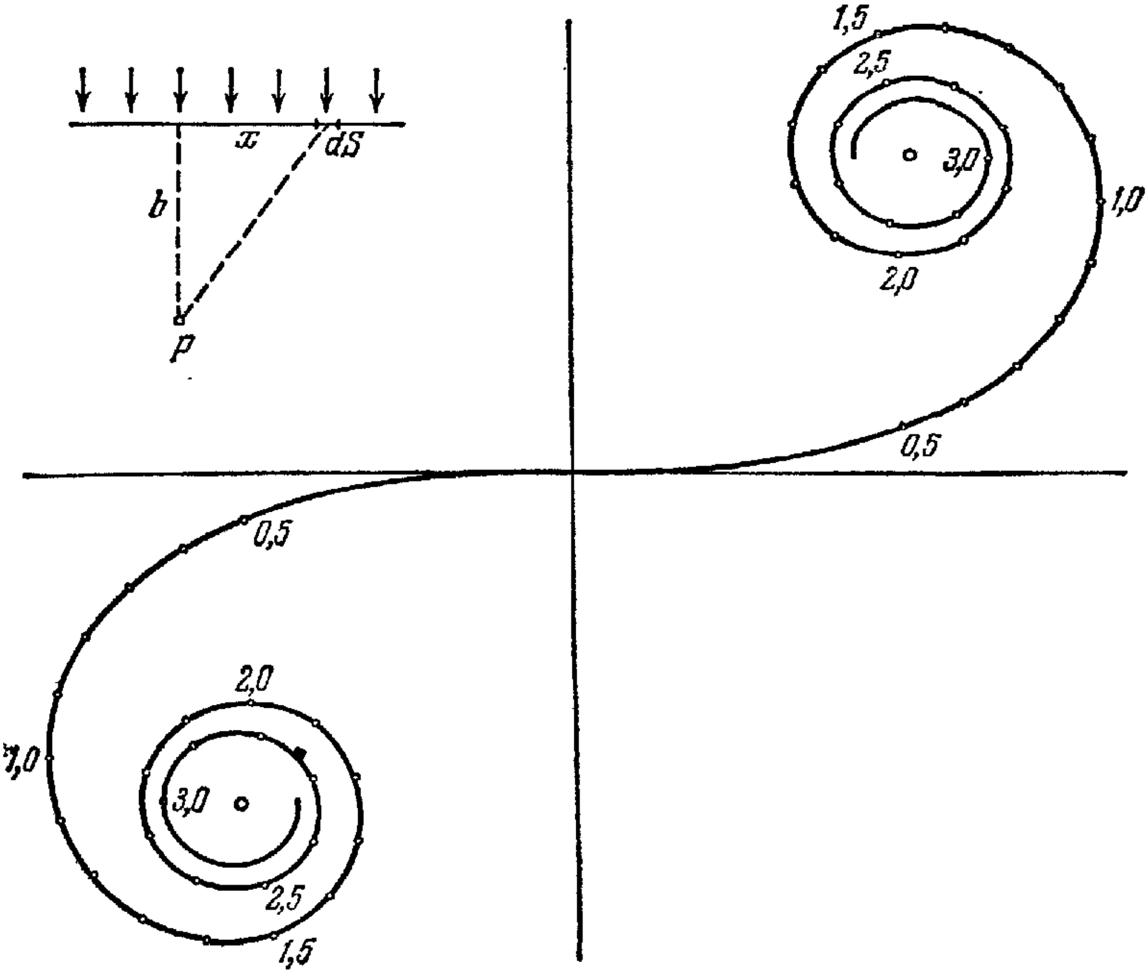

Рис.4.1 Спираль Корню

ЗАДАЧА 4.1 (5.115/5.120)

Плоская световая волна с $\lambda = 0.65$ мкм падает нормально на большую стеклянную пластинку, на противоположной стороне которой имеется уступ и непрозрачная полоска ширины a = 0.30 мм (рис. 4.1). На расстоянии b = 110 см от пластинки находится экран. Высота уступа h подобрана такой, что в точке 2 на экране интенсивность света оказывается максимально возможной. Найти с помощью рис. 4.1 отношение интенсивностей в точках 1 и 2.

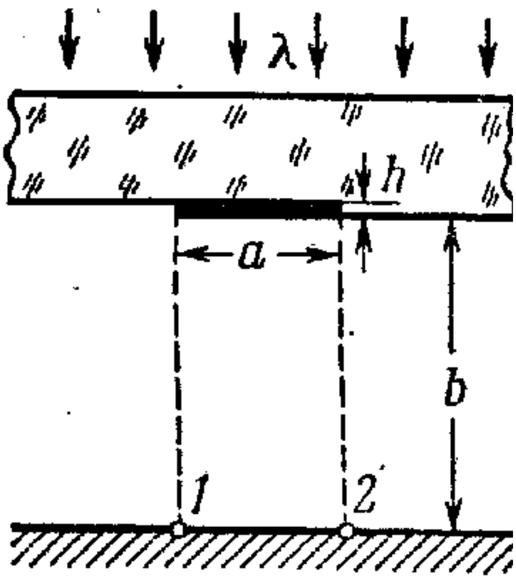

Рис.4.2

Решение

В случае, когда форма преграды на пути световой волны прямоугольная, то удобно разбивать волновой фронт на зоны не кольцевые (зоны Френеля), а на бесконечные прямоугольные полоски. Такие зоны называются зонами Шустера. В отличие от зон Френеля, площади которых равны, площади этих зон довольно быстро уменьшаются с увеличением их номера. Поэтому спираль, которая получается для вычисления векторов электрического поля от таких частей волнового фронта, отличается от спирали Френеля. Такая спираль называется спиралью Корню (рис.4.1) На спирали отложено значение параметра v, который связан с величиной x формулой

$v = x\sqrt{\dfrac{2}{b\lambda}}$, где x и b - расстояния, характеризующие положение элемента dS волновой поверхности относительно точки наблюдения P, как показано в левом верхнем углу рис.4.1. Для нахождения вектора электрического поля в точке P на экране от открытой части волнового фронта необходимо, зная координаты x границ открытой части волнового фронта, вычислить соответствующие им v и соединить точки на спирали отрезком прямой. Затем, измерив его длину линейкой, найти отношение этой величины к длине отрезка, соединяющего фокусы спирали (его длина прямопропорциональна E_0 - модулю напряженности электрического поля от всего открытого волнового фронта). Квадрат полученной величины равен отношению интенсивности I в точке P и интенсивности падающей на препятствие волны I_0.

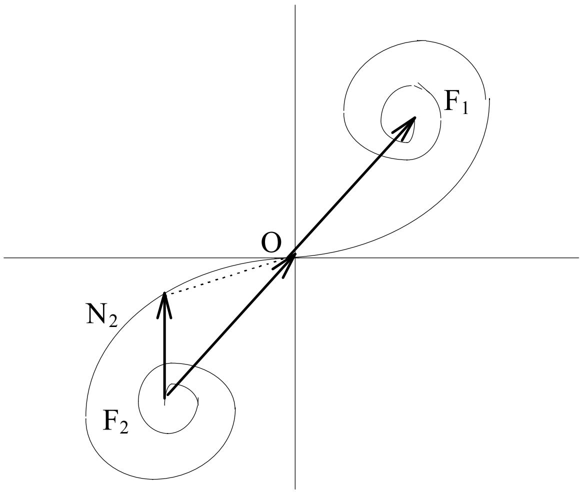

Рис.4.3

Для точки 2 на экране правая часть волновой поверхности открыта и вектор электрического поля в этой точке от правой части пропорционален отрезку, соединяющему точку O спирали с правым фокусом (вектор OF_1 на рис.4.3).Левая же часть волновой поверхности для точки P закрыта непрозрачной полоской. Тогда представим левую часть волновой поверхности в виде двух: закрытую непрозрачной полоской и всю остальную. На рис.4.3 вектор электрического поля в точке 2 от закрытой части изображен пунктиром (вектор N_2O). Поэтому от левой части волновой поверхности вместо отрезка F_2O вектор электрического поля будет пропорционален отрезку F_2N_2 . Кроме того, надо учесть, что вектор электрического поля соответствующий отрезку F_2N_2 будет опережать по фазе (то есть повернется по часовой стрелке относительно своего положения на спирали) вектор OF_1 , так как левая часть световой волны прошла не стеклянную пластинку толщиной h, а воздушную прослойку.

Для расчета необходимо вычислить значение v для x = a = 0.3 мм. Оно равно

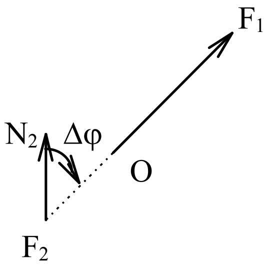

Рис.4.4

$v_a = a\sqrt{\dfrac{2}{b\lambda}} = 0.5$. Это соответствует вертикальному положению отрезка на спирали. Таким образом, для получения максимальной освещенности в точке 2 вектор F_2N_2 должен повернутся по часовой стрелке на угол $\Delta\varphi = \pi/4 + 2\pi k$ (рис.4.4). При этом высота уступа должна быть решением уравнения

$$\Delta\varphi = \frac{\pi}{4} + 2\pi k = \frac{2\pi}{\lambda} h ,$$

откуда $h = \lambda\cdot(\pi/8 + k)$. Тогда вектор электрического поля в точке 2 можно найти как сумму длин векторов F_2N_2 и OF_1 с помощью линейки. Она оказывается равной $E_2 = 0.81E_0$.

Теперь рассмотрим все для точки 1. Левая половина волновой поверхности открыта для точки 1 полностью и вектор $(F_2O)_1$ для нее необходимо повернуть по часовой стрелке на угол $\Delta\varphi = \pi/4 + 2\pi k$ (этот результат соответствует выбору h для достижения максимальной освещенности экрана в точке 2). В этом случае вектор $(F_2O)_1$ расположится горизонтально. Правая же часть волновой поверхности разделится на закрытую полоской и все остальное так же, как и для случая точки 2. При этом отрезок N_1F_1 будет расположен вертикально. Поэтому длина вектора E_1 может быть найдена с помощью линейки и теоремы Пифагора:

$$E_1 = \sqrt{(N_1F_1)^2 + (F_2O)_1^2} = 0.59\ E_0\ .$$

Окончательно получаем:

$$\frac{I_2}{I_1} = \left(\frac{E_2}{E_1}\right)^2 = \frac{(F_2N_2 + OF_1)^2}{(N_1F_1)^2 + (F_2O)_1^2} = 1.9$$

ЗАДАЧА 4.2 (5.116/5.121)

Плоская монохроматическая световая волна интенсивности I_0 падает нормально на непрозрачный экран, в котором прорезана длинная щель с полукруглым вырезом на одной из сторон (рис.4.5). Край выреза совпадает с границей первой зоны Френеля для точки наблюдения Р. Ширина щели составляет 0.90 радиуса выреза. Найти с помощью рис.4.1 интенсивность света в точке Р.

Рис.4.5

Решение

При решении этой задачи требуется совместное использование спирали Френеля для полукруглого отверстия и спирали Корню для прямоугольного выреза. Необходимо сложить два вектора: $\mathbf{E}_{\frac{1}{2}}$ - от половины первой зоны Френеля по площади и E_b - от выреза шириной $\Delta\mathbf{x} = \boldsymbol{\eta}\cdot\mathbf{r}_1 = \boldsymbol{\eta}\sqrt{\mathbf{b}\boldsymbol{\lambda}}$. Это по спирали Корню соответствует параметру

$$\mathbf{v}_1 = \Delta\mathbf{x}\sqrt{\frac{2}{\mathbf{b}\boldsymbol{\lambda}}} = \sqrt{2}\cdot\boldsymbol{\eta} = 1.3\ .$$

Такому значению v_1 по спирали Корню соответствует вектор E_b**,** изображенный на рис.4.6. Длина этого вектора определяется линейкой по спирали и равна $E_b = 0.67\cdot E_0$. Напомним, что вектору E_0 соответствует отрезок, соединяющий фокусы спирали Корню. Модуль вектора $\mathbf{E}_{\frac{1}{2}}$ равен половине вектора $\mathbf{E_1}$ от всей первой зоны Френеля, а по фазе совпадает с ним (рис.4.7). Это связано с тем, что электрическое поле от участка открытой волновой поверхности прямо пропорционален площади участка. Этот вектор по фазе тоже совпадает с вектором $\mathbf{E_0}$.

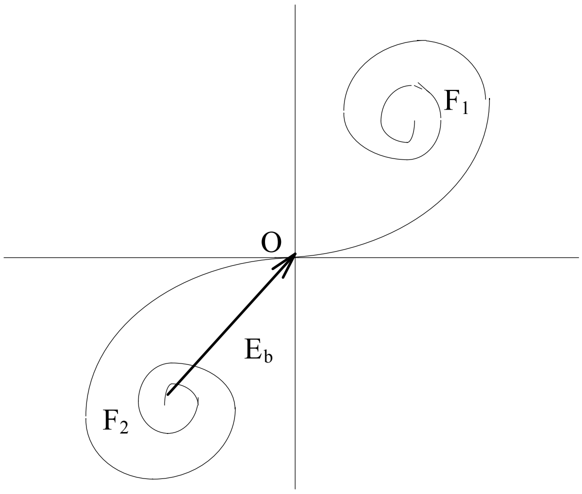

Рис.4.6

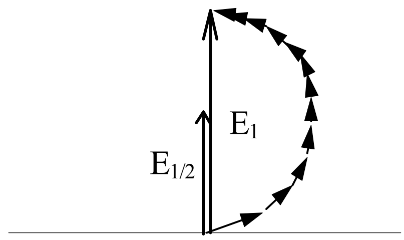

Рис. 4.7

Поэтому можно считать, что вектора $\mathbf{E}_{\frac{1}{2}}$ и $\mathbf{E_b}$ параллельны и их сумма будет равна $E_\Sigma = \mathbf{E}_{\frac{1}{2}} + E_b = 1.67 \cdot E_0$, интенсивность в точке P будет пропорциональна квадрату E_Σ и равна $I_P = 2.8 \cdot I_0$.

ЗАДАЧА 4.3 (5.128/5.133)

Свет с длиной волны 530 нм падает на прозрачную дифракционную решетку, период которой равен 1.50 мкм. Найти угол с нормалью к решетке, под которым образуется фраунгоферов максимум наибольшего порядка, если свет падает на решетку:
а) нормально; б) под углом 60^0 к нормали.

Решение

При нормальном падении света с длиной волны λ на дифракционную решетку угол, под которым наблюдается максимум к - того порядка, можно определить по формуле

$d \cdot Sin\theta = \pm k \cdot \lambda$, где k = 0,1,2....

Так как значения $Sin\theta$ лежат в интервале [-1,1], то максимальный порядок фраунгоферова максимума равен наибольшему из целых чисел, не превосходящих d/λ . В нашем случае он оказывается равен $k_a = 2$. Тогда угол, под которым будет наблюдаться этот максимум найдем по формуле

$$\theta_a = ArcSin\left(\frac{2 \cdot \lambda}{d}\right) = ArcSin(0.707) = 45^0 .$$

При наклонном падении света на дифракционную решетку формула для нахождения положения фраунгоферовых максимумов выглядит иначе:

$d(Sin\theta - Sin\theta_0) = \pm k \cdot \lambda$, где k = 0,1,2....

Аналогичный расчет дает для этого случая $k_б = 5$, что соответствует знаку минус в формуле для максимумов. Соответствующий угол

$$\theta_б = ArcSin\left(Sin\theta_0 - \frac{k_б \cdot \lambda}{d}\right) = ArcSin(-0.89) = -64^0 .$$

ЗАДАЧА 4.4 (5.136/5.   )

Свет с λ = 589.0 нм падает нормально на дифракционную решетку с периодом d = 2.5 мкм, содержащую N = 10000 штрихов. Найти угловую ширину дифракционного максимума второго порядка.

Решение

Угловое положение k - того главного фраунгоферова максимума можно определить по формуле $d \cdot Sin\theta_к = k \cdot \lambda$. ближайшие по угловому положению к нему побочные минимумы определим по другой формуле:

$$d \cdot Sin\theta_{k-} = \lambda\left(k - \frac{1}{N}\right); \quad d \cdot Sin\theta_{k+} = \lambda\left(k + \frac{1}{N}\right) .$$

Тогда угловая ширина k - того главного фраунгоферова максимума получится как разность углов

$$\Delta\theta_к = \theta_{к+} - \theta_{к-} .$$

Несложные преобразования, приведенные ниже, приводят к ответу:

$$Sin\theta_{k+} - Sin\theta_{k-} = \frac{2 \cdot \lambda}{N \cdot d} = 2 \cdot Cos\left(\frac{\theta_{k+} + \theta_{k-}}{2}\right) \cdot Sin\frac{\Delta\theta_k}{2} ;$$

$$Sin\frac{\Delta\theta_k}{2} \cong \frac{\Delta\theta_k}{2} \ ; \ Cos\left(\frac{\theta_{k+} + \theta_{k-}}{2}\right) \cong Cos\theta_k = \sqrt{1 - \left(\frac{k \cdot \lambda}{d}\right)^2} \ ;$$

$$\Delta\theta_k = \frac{2 \cdot \lambda}{N \cdot d} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{k \cdot \lambda}{d}\right)^2}} = 11 \text{ угловых минут.}$$

ЗАДАЧА 4.5 (5.142/5.148)

Прозрачная дифракционная решетка кварцевого спектрографа имеет ширину 25 мм и содержит 250 штрихов на миллиметр. Фокусное расстояние объектива, в фокальной плоскости которого находится фотопластинка, равно 80 см. Свет падает на решетку нормально. Исследуемый спектр содержит спектральную линию, компоненты дублета которой имеют длины волн 310.154 нм и 310.184 нм. Определить:

а) расстояния на фотопластинке между компонентами этого дублета в спектрах первого и второго порядков;

б) будут ли они разрешены в этих порядках спектра.

Решение

Дифракционные решетки бывают прозрачные и отражательные. Прозрачные решетки изготавливаются из стекла или кварцевых пластинок, на поверхности которых с помощью специальной машины наносится алмазным резцом ряд параллельных штрихов. Промежутки между штрихами служат щелями. Линза, стоящая за решеткой, собирает все параллельные лучи в одной точке фокальной плоскости, где и находится экран (рис.4.8).

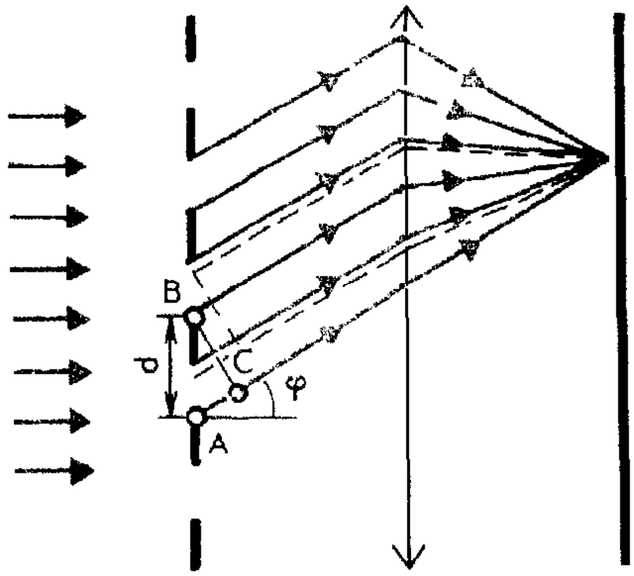

Рис.4.8

Запишем условие главных максимумов для длин волн λ_1 и λ_2 в первом порядке спектра: $d \cdot \sin\theta_{11} = \lambda_1$; $d \cdot \sin\theta_{12} = \lambda_2$, где $d = L / N$ - постоянная решетки. Из рис.4.8 видно, что линейное расстояние Δx_1 между этими максимумами равно $\Delta x_1 = F \cdot (tg\theta_{12} - tg\theta_{11})$. Так как

$$\mathbf{tg\theta} = \frac{\mathbf{Sin\theta}}{\mathbf{Cos\theta}} = \frac{\boldsymbol{\lambda} \,/\, \mathbf{d}}{\sqrt{1 - \left(\frac{\boldsymbol{\lambda}}{\mathbf{d}}\right)^2}} \ ,$$

то с учетом малости $\Delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1$ получаем для Δx_1

$$\Delta \mathbf{x}_1 = \mathbf{F}\frac{\Delta\boldsymbol{\lambda}}{\sqrt{\mathbf{d}^2 - \boldsymbol{\lambda}^2}} = 6 \text{ мкм.}$$

Проделав аналогичный расчет для спектра второго порядка, получаем $\Delta x_2 = 2\cdot\Delta x_1 = 12$ мкм.

Теперь перейдем к определению разрешающей силы спектрометра. Для количественного введения этого важнейшего понятия нужно прежде всего условится о критерии разрешения. *Критерий разрешения* был введен Релеем, предложившим считать две спектральные линии разрешенными в том случае, когда максимум для одной длины волны λ_1 совпадает с ближайшим минимумом для другой длины волны λ_2 . В этом случае (при равной интенсивности I_0 исследуемых симметричных максимумов) глубина «провала» между горбами составит $0.2\cdot I_0$. Если максимум для λ_1 и минимум для λ_2 находятся ближе друг к другу, то линии разрешены не будут (рис.4.9).

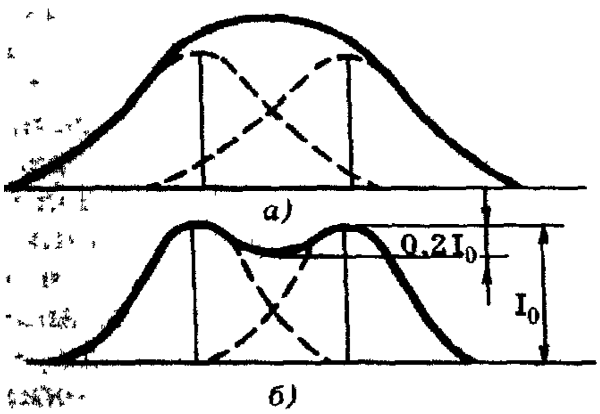

Рис.4.9

Запишем для нашего случая условие максимума для λ_1 для k - того порядка спектра и условие минимума для λ_2 в том же порядке:

$$d\cdot Sin\theta_{11} = k\cdot\lambda_1 \quad ; \quad d\cdot Sin\theta_{12} = \left(\mathbf{k} - \frac{1}{\mathbf{N}}\right)\lambda_2 \,.$$

Углы θ_{11} и θ_{12} должны быть равны друг другу, следовательно,

$$\mathbf{k} = \frac{\boldsymbol{\lambda}_2}{\mathbf{N}\cdot(\boldsymbol{\lambda}_2 - \boldsymbol{\lambda}_1)} = 1.7 > 1.$$

Это означает, что для k = 1 критерий Релея не дает разрешения этих линий, а для k = 2 эти линии будут разрешены.

Задачи, рекомендуемые по этой теме в качестве домашнего задания: 5.111/5.116, 5.114/5.119, 5.126/5.131, 5.140/5.146, 5.144/5.153

Занятие 3.
Тема занятия: Поляризация света.

Рекомендуемые задания на дом : №№

Задача 3.1 (№ 5.159/5.170)

Линейно поляризованный световой пучок падает на поляризатор, вращающийся вокруг оси пучка с угловой скоростью ω = 21 рад/с. Найти световую энергию, проходящую через поляризатор за один оборот, если поток энергии в падающем пучке $\Phi_0 = 4.0$ мВт.

РЕШЕНИЕ

Световая энергия, проходящая через вращающийся поляризатор, будет зависеть от времени, поскольку по закону Малюса идеальный поляризатор пропускает лишь часть линейно-поляризованного света в соответствии с формулой $I = I_0 \cos^2 \varphi$, где I_0 и I - интенсивности, соответственно, падающего и прошедшего света, а φ - угол между плоскостью поляризации падающего пучка и оптической осью поляризатора, который, согласно условию задачи, меняется во времени по гармоническому закону $\varphi(t) = \omega t$ (начальный угол φ_0 удобно выбрать равным нулю).

Аналогичным образом зависит от времени прошедшая через поляризатор за время dt энергия : $d\Phi = \Phi_0 \cos^2 \omega t\, dt$. Энергия, прошедшая через поляризатор за период $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$, равна

$$\Phi(T) = \int_0^T \Phi_0 \cos^2 \omega t\, dt = \frac{\pi}{\omega}\Phi_0 = 0.6 \text{ мДж.}$$

Задача 3.2 (№ 5.160/5.172)

Пучок естественного света падает на систему из N=6 николей, плоскость пропускания каждого из которых повернута на угол φ=30° относительно плоскости пропускания предыдущего николя. Какая часть светового потока проходит через эту систему ?

РЕШЕНИЕ

Естественный свет, представляющий собой набор электромагнитных волн, в котором колебания вектора $\vec{E}$ (и, соответственно, и вектора $\vec{H}$) могут происходить в любых направлениях в плоскости, перпендикулярной световому пучку, обычно рассматривают как сумму двух некогерентных линейно-поляризованных волн с взаимно перпендикулярными плоскостями поляризации, каждая из которых несет ровно половину энергии пучка. При таком подходе ясно, что через поляризатор проходит лишь половина светового потока - та волна, плоскость поляризации которой параллельна оптической оси поляризатора. Поэтому, интенсивность света на выходе первого поляризатора равна $I_1=I_0/2$, где I_0 - интенсивность падающего естественного света.

Далее уже линейно-поляризованный свет проходит через поляризаторы в соответствии с законом Малюса :

$$I_2 = I_1 \cos^2 \varphi \ , \ I_3 = I_2 \cos^2 \varphi \ , \dots \ I_6 = I_5 \cos^2 \varphi \, .$$

В результате через систему пройдет

$$I_6 = \frac{1}{2} I_0 \cos^{2(N-1)} \varphi = \frac{1}{2} I_0 \cos^{10} \varphi = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}\right)^5 I_0 = 0.12\, I_0 \, .$$

Задача 3.3 (№ 5.162/5.174)

Степень поляризации частично поляризованного P=0.25. Найти отношение интенсивности поляризованной составляющей этого света к интенсивности естественной составляющей.

РЕШЕНИЕ

Степень поляризации света определяется формулой $P = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}}$. Если свет состоит из естественной составляющей и линейно-поляризованной части, то

$$I_{\max} = \frac{I_{ест}}{2} + I_{лин}\ ,\ I_{\max} = \frac{I_{ест}}{2},$$

поскольку, как уже обсуждалось в задаче **3.2**, естественный свет принято рассматривать как сумму двух некогерентных линейно-поляризованных волн с взаимно перпендикулярными плоскостями поляризации, энергия каждой из которых равна половине энергии пучка. Тогда, согласно определению степени поляризации, $P = \frac{I_{лин}}{I_{ест} + I_{лин}}$, откуда следует $(1-P)I_{лин} = I_{ест}P$.

Таким образом, окончательно : $\frac{I_{лин}}{I_{ест}} = \frac{P}{1-P} = \frac{1}{3}$.

Задача 3.4 (№ 5.163/5.176)

На пути частично поляризованного пучка поместили николь. При повороте николя на угол φ=60° из положения, соответствующего максимуму пропускания света, интенсивность прошедшего света уменьшилась в η=3.0 раза. Найти степень поляризации падающего света.

РЕШЕНИЕ

Формулу для степени поляризации частично поляризованного света, использованную в задаче **3.3**, можно записать в следующем виде: $P = \frac{I_{\max}/I_{\min} - 1}{I_{\max}/I_{\min} + 1}$. Таким образом, надо найти отношение максимальной интенсивности прошедшего света к минимальной. Для этого, используя закон Малюса, запишем интенсивность света, прошедшего через николь, оптическая ось которого повернута на угол φ относительно угла максимального прохождения, как сумму двух некогерентных волн с взаимно-перпендикулярной поляризацией:

$$\frac{I_{\max}}{\eta} = I_{\max}\cos^2\varphi + I_{\min}\cos^2(\frac{\pi}{2} - \varphi) .$$

В результате $\frac{I_{\max}}{I_{\min}} = \frac{\eta \sin^2\varphi}{1 - \eta\cos^2\varphi}$, откуда для степени поляризации получается

$$P = \frac{\eta - 1}{1 - \eta\cos 2\varphi} = 0.8 .$$

Задача 3.3 (№ 5.162/5.174)

Степень поляризации частично поляризованного P=0.25. Найти отношение интенсивности поляризованной составляющей этого света к интенсивности естественной составляющей.

РЕШЕНИЕ

Степень поляризации света определяется формулой $P = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}}$. Если свет состоит из естественной составляющей и линейно-поляризованной части, то

$$I_{\max} = \frac{I_{ест}}{2} + I_{лин} \ , \ I_{\max} = \frac{I_{ест}}{2} ,$$

поскольку, как уже обсуждалось в задаче **3.2**, естественный свет принято рассматривать как сумму двух некогерентных линейно-поляризованных волн с взаимно перпендикулярными плоскостями поляризации, энергия каждой из которых равна половине энергии пучка. Тогда, согласно определению степени поляризации, $P = \frac{I_{лин}}{I_{ест} + I_{лин}}$, откуда следует $(1 - P)I_{лин} = I_{ест}P$.

Таким образом, окончательно : $\frac{I_{лин}}{I_{ест}} = \frac{P}{1 - P} = \frac{1}{3}$.

Задача 3.5 (№ 5.169/5.182)

На поверхность воды под углом Брюстера падает пучок плоскополяризованного света. Плоскость колебаний светового пучка составляет угол φ=45° с плоскостью падения. Найти коэффициент отражения.

РЕШЕНИЕ

По определению коэффициентом отражения называется величина равная отношению интенсивности пучка отраженного к интенсивности падающего пучка I_0. В данном случае удобно представить падающий пучок в виде суммы двух пучков: пучка, линейно поляризованного в плоскости падения и пучка с плоскостью поляризации, перпендикулярной плоскости падения, интенсивности которых будем в дальнейшем соответственно обозначать как $I_\parallel$ и $I_Б$. Тогда коэффициент отражения может быть записан следующим образом :

$$T = \frac{I'_\parallel + I'_\perp}{I_0} = \frac{E'^2_\parallel + E'^2_\perp}{E_0^2},$$

где $I'_\parallel$ и $I'_Б$ - интенсивности света в отраженных пучках с плоскостями поляризации параллельной и перпендикулярной плоскости падения, а $E'_\parallel$, $E'_Б$ и E_0 - напряженности электрического поля соответствующих световых волн. При этом интенсивности падающих пучков связаны соотношениями: $I_\parallel = I_0 \cos^2 \varphi$, $I_\perp = I_0 \sin^2 \varphi$.

По условию задачи световой поток падает на границу раздела двух сред с показателями преломления n_1 (показатель преломления воздуха n_1=1) и n_2 (показатель преломления воды n_2=n=1.33) под углом Брюстера $\theta_Б$, для которого $tg\theta_Б = \frac{n_2}{n_1} = n$. Этот угол определяется как угол, при котором отраженный свет оказывается полностью поляризованным в плоскости, перпендикулярной плоскости падения, и выполняется соотношение $\theta_{пад} + \theta_{прел} = \frac{\pi}{2}$. Таким образом, в отраженном пучке будет отсутствовать составляющая $I'_\parallel$, а компонента $I'_Б$, согласно формулам Френеля, будет иметь вид :

$$I'_\perp = I_0 \sin^2 \varphi \sin^2 (2\theta_Б - \pi/2) = I_0 \sin^2 \varphi \cos^2 2\theta_Б .$$

При этом $\cos 2\theta_Б$ может быть выражен через показатели преломления воздуха и воды : $\cos 2\theta_Б = \cos^2 \theta_Б - \sin^2 \theta_Б = \frac{1}{n^2+1} - \frac{n^2}{n^2+1} = -\frac{n^2-1}{n^2+1}$, откуда коэффициент отражения $T = \left(\frac{n^2-1}{n^2+1}\right)^2 \sin^2 \varphi = 0.038$.

Задача 3.6 (№ 5.180/5.194)

Кварцевую пластинку, вырезанную параллельно оптической оси, поместили между двумя скрещенными николями. Угол между главными направлениями николей и пластинки равен 45°. Толщина пластинки d = 0.50 мм. При каких длинах волн в интервале 0.50-0.60 мкм интенсивность света, прошедшего через эту систему, не будет зависеть от поворота заднего николя ? Разность показателей преломления обыкновенных и необыкновенных лучей в этом интервале длин волн считать Δn=0.009.

РЕШЕНИЕ

После прохождения первого николя свет оказывается плоскополяризованным под углом 45° к главному направлению двулучепреломляющего кристалла кварца, т.е. может быть представлен в виде суммы обыкновенного и необыкновенного лучей одинаковой интенсивности. Для того, чтобы интенсивность света, прошедшего через систему, не зависела от угла поворота второго николя, нужно на выходе кристалла получить циркулярно поляризованный свет, т.е. разность хода обыкновенного и необыкновенного лучей $\Delta\phi = k\ \pi/2 + \pi m$, где m - целое число :

$$\Delta\phi = k\, d\Delta n = \frac{2\pi}{\lambda} d\Delta n = \frac{\pi}{2}(1+2m),$$

где k=2π/λ - волновой вектор волны падающего света, $d\Delta n$- разность оптических длин пути для обыкновенного и необыкновенного лучей. Из последнего равенства окончательно следует :

$$\lambda = \frac{4d\Delta n}{2m+1}.$$

В заданный интервал длин волн 0.50-0.60 мкм попадают λ=0.51, 0.55 и 0.58 соответствующие m = 17, 16 и 15.

Занятие 4.
Тема занятия: Дисперсия и поглощение света.

Рекомендуемые задания на дом : №№ 5.200/5.215, 5.209/5.224, 5.212/5.227, 5.213/5.228, 5.223/5.238

Задача 4.1 (№ 5.201/5.214)

Электромагнитная волна с частотой ω распространяется в разреженной плазме. Концентрация свободных электронов в плазме равна n_0. Пренебрегая взаимодействием волны с ионами плазмы найти зависимость:
a) диэлектрической проницаемости плазмы то частоты;
b) фазовой скорости электромагнитной волны от ее длины волны λ в плазме.

РЕШЕНИЕ

Уравнения движения свободных электронов и ионов идеальной плазмы (без потерь энергии) под действием периодической силы (электрической компоненты монохроматической электромагнитной волны с амплитудой E_m и частотой ω) можно записать, приняв за ось OX направление вектора напряженности электрического поля $\vec{E}(t) = \vec{E}_m \cos\omega t$ в момент времени t=0, в виде:

$$m_e \frac{d^2 x}{dt^2} = -eE_m \cos\omega t$$

$$M_i \frac{d^2 X}{dt^2} = -eE_m \cos\omega t\,,$$

где e - заряд электрона, m_e и M_i - массы, соответственно, электронов и ионов, $x(t)$ и $X(t)$ - их смещения относительно положения равновесия в невозмущенной плазме,. Решениями записанных уравнений являются периодическими функциями $x(t) = \frac{eE_m}{m_e\omega^2}\cos\omega t$ и $X(t) = \frac{eE_m}{M_i\omega^2}\cos\omega t$. Поскольку $M_i >> m_e$, то амплитуда смещения электронов x также много больше амплитуды смещения ионов X, и движением ионов можно пренебречь.

В этом случае для поляризованности P (дипольного момента единицы объема, содержащего n_0 свободных электронов) плазмы и вектора индукции D можно записать : $P = pn_0$, где $p = -ex;$

$D = \varepsilon_0 E + P = \varepsilon\varepsilon_0 E.$

Из последних соотношений, в свою очередь может быть выражена диэлектрическая проницаемость ε:

$$\varepsilon = 1 + \frac{P}{\varepsilon_0 E} = 1 - \frac{n_0 e^2}{\varepsilon_0 m_e \omega^2} = 1 - \frac{\omega^2{}_0}{\omega^2}\,,$$

где $\omega_0 = \frac{n_0 e^2}{\varepsilon_0 m_e}$ - частота собственных плазменных колебаний.

Фазовая скорость $v_ф$ электромагнитной волны в среде с показателем преломления $n = \sqrt{\varepsilon(\omega)}$ (считая магнитную восприимчивость плазмы равной единице) равна $v_\phi = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon}}$, где c - скорость света в вакууме, $\omega = \frac{2\pi c}{\lambda}$. Подставляя полученное выражение для диэлектрической проницаемости, окончательно получаем

$$v_\phi = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}}} \approx c\sqrt{1 + \frac{\omega_0^2}{\omega^2}} = c\sqrt{1 + \frac{n_0 e^2}{4\pi \varepsilon_0 m_e c^2}\lambda^2} .$$

Задача 4.2 (№ 5.208/5.223)

Найти зависимость между групповой u и фазовой v скоростями для следующих законов дисперсии:
a) $v \sim 1/\sqrt{\lambda}$;
b) $v \sim k$;
c) $v \sim 1/\omega^2$.

РЕШЕНИЕ

Согласно формуле Рэлея, групповая и фазовая скорости волнового пакета связаны соотношением $u = \dfrac{d\omega}{d\,k} = v - \lambda\dfrac{dv}{d\lambda}$, где $k = 2\pi/\lambda$, $\lambda = 2\pi\, v/\omega$.

a) Знак пропорциональности «~» означает, что $v = A/\sqrt{\lambda}$, где A - некоторая константа, не зависящая от λ. Таким образом, $\dfrac{d\,v}{d\lambda} = -\dfrac{A}{2\lambda^{3/2}}$, откуда следует $\lambda\dfrac{dv}{d\lambda} = -\lambda\dfrac{A}{2\lambda^{3/2}} = -\dfrac{v}{2}$, и, окончательно, $u = v + v/2 = \dfrac{3}{2}v$.

b) Аналогично п.(а), $v = A\,k = \dfrac{2\pi\,A}{\lambda}$, откуда $\dfrac{d\,v}{d\lambda} = -\dfrac{2\pi\,A}{\lambda^2}$ и $u = v + \lambda\dfrac{2\pi\,A}{\lambda^2} = 2v$.

c) Поскольку частота ω связана с волновым вектор и фазовой скоростью соотношением $\omega = v\,k$, заданный закон дисперсии можно переписать в виде $v = \dfrac{A}{\omega^2} = \dfrac{A}{v^2 k^2}$, откуда следует $v = \dfrac{A'}{k^{2/3}}$, где $A' = A^{1/3}$ - также некоторая константа, не зависящая от λ. Таким образом,

$$u = v - \lambda\frac{dv}{dk}\frac{dk}{d\lambda} = v + k\frac{dv}{dk} = v + k\left(-\frac{2}{3}A'k^{-5/3}\right) = v - \frac{2}{3}v = v/3$$

Задача 4.3 (№ 5.211/5.226)

Плоский световой импульс распространяется в среде, где фазовая скорость v линейно зависит от длины волны λ по закону $v = a + b\lambda$, где a и b - некоторые положительные постоянные. Показать, что в такой среде форма произвольного светового импульса будет восстанавливаться через промежуток времени $\tau = 1/b$.

РЕШЕНИЕ

Световой импульс может выть представлен в виде суперпозиции гармонических составляющих (плоских волн), и для огибающей импульса можно записать

$$u(t) = \sum_k u_k(t) = \sum_k u_k e^{-i(\omega t - k x)},$$

где, согласно заданному закону дисперсии, $\omega = k\,v = \frac{2\pi\,v}{\lambda} = \frac{2\pi\,a}{\lambda} + 2\pi b$. Таким образом, для k-й компоненты $u_k(t) = u_k e^{-i(ka\,t - k\,x)} e^{-i\,2\pi\,b\,t}$. В этом случае зависимость от времени результирующей огибающей принимает вид

$$u(t) = \left(\sum_k u_k e^{-i(ka\,t - k\,x)}\right) e^{-i\,2\pi\,b\,t} = \left(\sum_k u_k e^{-i(ka\,t - k\,x)}\right) e^{-\frac{i\,2\pi\,t}{\tau}},$$

т.е. является периодической функцией с периодом $\tau = 1/b$.

Задача 4.4 (№ 5.216/5.231)

Монохроматический пучок света падает нормально на поверхность плоскопараллельной пластины толщины l. Показатель поглощения вещества пластины линейно меняется вдоль нормали к ее поверхности от значения k_1 до k_2. Коэффициент отражения от каждой поверхности пластины равен ρ. Пренебрегая вторичными отражениями, определить коэффициент пропускания такой пластины.

РЕШЕНИЕ

Приняв за начало отсчета обращенную к падающему пучку поверхность пластины, зависимость показателя поглощения от координаты x вдоль нормали к поверхности пластины можно записать в виде $k(x) = k_1 + \frac{k_2 - k_1}{l} x$.

Интенсивности падающего пучка I_0 и пучка, прошедшего без отражения через поверхность пластины, I_1 связаны соотношением $I_1 = (1-\rho) I_0$.

Интенсивность света I_2, распространяющегося внутри пластины с показателем поглощения $k(x)$, убывает по закону Бугера $dI_2 = -I_2 k\, dx$. С учетом явной зависимости $k(x)$, уравнение, описывающее убывание интенсивности света $I_2(x)$ принимает вид

$$\frac{dI_2}{I_2} = -\left(k_1 + \frac{k_2 - k_1}{l} x\right) dx .$$

После интегрирования имеем

$$\ln I_2 = -x\left(k_1 + \frac{k_2 - k_1}{2l} x\right) + \ln A ,$$

где A - неизвестная константа, для определения которой необходимо учесть граничные условия на обращенной к падающему пучку поверхности $I_2(x=0) = I_1$, откуда следует $A=I_1$.

После полного прохождения толщины пластины интенсивность света на противоположной поверхности $I_2(x=l) = I_1 e^{-(k_1+k_2)l/2}$.

В свою очередь, интенсивность пучка I_3 на выходе пластины, т.е. пучка, не испытавшего отражения на поверхности $x=l$, равна

$$I_3 = (1-\rho) I_2 = (1-\rho)^2 I_0 e^{-(k_1+k_2)l/2} ,$$

откуда следует, что полный коэффициент пропускания пластины

$$\tau = \frac{I_3}{I_0} = (1-\rho)^2 e^{-(k_1+k_2)l/2} .$$

ЗАНЯТИЕ 7

Тема занятия: оптика движущихся источников.
В предложенных задачах рассматриваются следующие вопросы:
7.1 - эффект Доплера в общем случае;
7.2 - продольный эффект Доплера;
7.3 - основы радиолокации;
7.4 - доплеровское уширение линий.

ЗАДАЧА 7.1(5.226/)

Одна из спектральных линий, испускаемых возбужденными ионами He^+, имеет длину волны $\lambda = 410$ нм. Найти доплеровское смещение $\Delta\lambda$ этой линии, если ее наблюдать под углом $\theta = 30^0$ к пучку движущихся ионов с кинетической энергией T = 10 МэВ.

Решение

В основе явлений, рассматриваемых на этом занятии, лежит эффект Доплера. Поясним, что понимают под этим названием. Допустим, что *S* является источником волн. Очевидно, частота колебаний волны определяется процессами, происходящими в самом источнике *S*. Однако в нашем распоряжении нет методов непосредственного измерения частоты колебаний источника, поэтому о ней судят по измерениям, производимым вне источника волны. В каком же соотношении находятся эти величины - действительная частота колебаний источника и частота колебаний, измеряемая наблюдателем? Доплер (1842 г.) впервые указал на то, что воспринимаемая частота колебаний, а также длина волны зависят не только от процессов, происходящих внутри источника волн, но и от того, находятся ли приборы, примененные для измерения частоты, в покое или движутся по отношению к источнику света. Изменение воспринимаемой частоты колебаний, обусловленное движением наблюдателя относительно источника волн, и называют эффектом Доплера. При исследованиях оказалось, что в случае световых волн этот эффект не зависит от того, что движется - источник света или приборы, регистрирующие частоту световых колебаний. Математическим выражением эффекта Доплера является следующая формула:

$$\lambda = \lambda_0 \frac{1 - \beta \cos\theta}{\sqrt{1 - \beta^2}}; \beta = \frac{v}{c}$$

где v - относительная скорость источника и приемника, c - скорость света в вакууме, θ - угол между направлениями относительного движения источника и приемника и линией наблюдения, а λ и λ_0 - длины волн, фиксируемые наблюдателем и неподвижно излучаемым источником. В нерелятивистском случае ($\beta \ll 1$) формула упрощается($\Delta\lambda = \lambda - \lambda_0$) -

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} = -\frac{v}{c}\cos\theta$$

По условию задачи известным является кинетическая энергия. Из нее можно определить скорости возбужденных ионов, которые и являются источниками излучения. Так как кинетическая энергия ионов $T \ll m_{He} \cdot c^2$ энергии покоя атомов гелия, то можно использовать классическую формулу для кинетической энергии:

$T = \frac{mv^2}{2}$. Тогда $\frac{v}{c} = \sqrt{\frac{2T}{m_{He}c^2}}$. Так как $m_{He} \cdot c^2 = 4 \cdot 938.3$ МэВ, то

$$\Delta\lambda = -\lambda_0\beta\cos\theta = \lambda_0\sqrt{\frac{2T}{m_{He}c^2}}\cos\theta = -26 \text{ нм}.$$

ЗАДАЧА 7.2(5.227/)

При наблюдении спектральной линии $\lambda = 0.59$ мкм в направлениях на противоположные края солнечного диска на его экваторе обнаружили различие в длинах волн на $\delta\lambda = 8$ пм. Найти период вращения Солнца вокруг собственной оси.

Решение

Наблюдатель, находящийся на Земле, видит движение Земли вокруг Солнца так, как изображено на рисунке 7.1. Направление вращения Солнца вокруг собственной оси показано на рисунке стрелкой. При этом скорости исследуемых точек A и B солнечной поверхности равны по величине и противоположны по направлению. В силу того, что расстояние между Солнцем и Землей во много раз больше размеров Солнца, то угол между линией наблюдения (изображена пунктиром) и

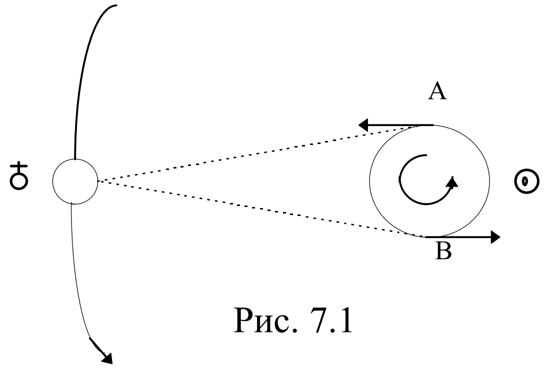

Рис. 7.1

направлением движения источника для точки А равен 180^0, а для точки В - нулю. Поэтому разность частот, излучаемых точками А и В, с точки зрения наблюдателя на Земле может быть определена с помощью формулы для классического эффекта Доплера:
$\frac{\Delta\omega}{\omega_0} = \frac{v}{c}\cos\theta$ после несложных вычислений. Расчет дает (c - скорость света) $\frac{\delta\lambda}{\lambda_0} = \frac{2v_A}{c}$. Скорость v_A может быть вычислена так: $v_A = \frac{2\pi R_C}{T_C}$, где R_C - радиус Солнца, а T_C - период его обращения вокруг своей оси. Итак,

$$T_C = \frac{4\pi R_C}{c}\frac{\lambda}{\delta\lambda} = 25 \text{ суток.}$$

ЗАДАЧА 7.3(5.230/)

Радиолокатор работает на длине волны $\lambda = 50.0$ см. Определить скорость приближающегося самолета, если частота биений между сигналом передатчика и сигналом, отраженным от самолета, в месте расположения локатора равна $\Delta\nu = 1.00$ кГц.

Решение

Биениями называется результат наложения двух волн одного направления с близкими частотами. В данном случае это излучаемая радиолокатором волна и волна, отраженная от самолета. В результате сложения этих волн в месте расположения радиолокатора получается волна с медленно (относительно основной частоты) меняющейся амплитудой. Обычно за амплитуду биений принимают величину, равную

$$\text{Амплитуда} = \left|2A\cos\left(\frac{\Delta\omega t}{2}\right)\right|$$

где А - амплитуда излучаемой волны, а $\omega = 2\pi\nu$- ее частота. Если радиолокатор работает на длине волны λ, то частота этой волны

$$\nu = \frac{c}{\lambda}.$$

Частота же отраженной волны может быть найдена по формуле эффекта Доплера

$$\nu_{ОТР} = \nu\left(1 - \frac{v}{c}\cos\theta\right).$$

Для продольного эффекта Доплера ($\theta = 0$) можно записать частоту биений как

$$\Delta\nu_Б = \frac{(\nu - \nu_{ОТР})}{2} = \frac{v}{\lambda}.$$

Тогда скорость самолета v будет равна

$$v = \frac{\Delta\nu \cdot \lambda}{2} = 250 \text{ м/с}.$$

ЗАДАЧА 7.4(5.238/)

Газ состоит из атомов массы m, находящихся в термодинамическом равновесии при температуре T. Пусть ω_0 - собственная частота излучаемого атомами света.

а) Показать, что спектральное распределение излучаемого света определяется формулой

$I_\omega = I_0 \cdot e^{-a(1-\omega/\omega_0)^2}$, (I_0 - спектральная интенсивность, соответствующая частоте ω_0, $a = m \cdot c^2/(2kT)$.

б) Найти относительную ширину $\Delta\omega/\omega_0$ данной спектральной линии, то есть ширину линии между частотами, при которых $I_\omega = I_0/2$.

Решение

Посмотрим на газ в некотором направлении, в котором и направим ось x. Тогда атомы в газе будут в данный момент иметь различные проекции скорости теплового движения V_x на эту ось. Распределение их по проекции скорости при термодинамическом равновесии определяется формулой Максвелла:

$$dn_x = n\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{1/2} e^{-\frac{mV^2}{2kT}} dV_x ,$$

где dV_x - интервал проекций скоростей, в котором находятся проекции скоростей у dn_x атомов; n - число атомов в единице объема. Из условия задачи ясно, что ω_0 - частота, излучаемая неподвижным атомом при данной температуре. В нашем случае каждый атом имеет некоторую проекцию V_x и излучает не частоту ω_0, а частоту ω, которая связана с V_x формулой для продольного эффекта Доплера (в нерелятивистском случае, как у нас, продольного эффекта Доплера нет). Поэтому

$$\omega = \omega_0(1 + \frac{V}{c}\cos\theta) = \omega_0\left(1 + \frac{V_x}{c}\right).$$

Отметим, что в этой формуле $V_x > 0$, когда излучающий атом движется нам навстречу. В единице объема таких атомов (имеющих проекцию скорости в интервале от V_x до $V_x + dV_x$) будет dn_x. Тогда энергия, излучаемая атомами в диапазоне от ω до ω +dω, будет пропорциональна числу излучающих атомов, то есть

$$dE(\omega) \sim dn_x(\omega) = n\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{1/2} e^{-\frac{mc^2(\omega-\omega_0)^2}{2kT\omega_0^2}} d\omega \ .$$

Спектральная интенсивность I_ω, то есть энергия, переносимая волной через единицу площади в данном направлении в единицу времени и имеющая частоты в единичном частотном интервале, будет иметь ту же частотную зависимость, что и $dE_\omega/d\omega$. Поэтому окончательно получаем искомую формулу:

$$I_\omega = I_0 \cdot e^{-\frac{mc^2(1-\omega/\omega_0)^2}{2kT}} \ .$$

Вторая часть задачи решается с помощью несложных вычислений, которые дают следующий результат:

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_0} = \sqrt{\frac{2kT\ln 2}{mc^2}} \ .$$

Задачи, рекомендуемые по этой теме в качестве домашнего задания: 5.224/, 5.228/, 5.231/, 5.233/. 5.239/.

Занятие 2.
Тема занятия: Излучение абсолютно черного тела (АЧТ). Формула Планка.

Рекомендуемые задания на дом : №№ 5.254/5.272, 5.257/5.275, 5.258/5.276, 5.260/5.278

Задача 2.1 (№ 5.253/5.270)

Полость объемом V=1.0 л заполнена тепловым излучением при температуре T=1000 К. Найти :

а) теплоемкость C_V ;

б) энтропию этого излучения S.

РЕШЕНИЕ

а) Согласно определению теплоемкости

$$C_M = \left(\frac{dE}{dT}\right)_V ,$$

где внутренняя энергия во всем объеме $E = u \cdot V$, u - объемная плотность энергии излучения АЧТ, связанная с энергетической светимостью $M_Э$ соотношением $u = \frac{4}{c} M_Э$. Последняя, в свою очередь, подчиняется закону Стефана-Больцмана для излучения АЧТ $M_Э = \sigma T^4$. Таким образом, $E = \frac{4}{c}\sigma T^4 V$, и, окончательно

$$C_V = \left(\frac{dE}{dT}\right)_V = 16\frac{V\sigma T^3}{c} = 3 \ нДж/K .$$

б) Согласно второму началу термодинамики, дифференциал энторпии $dS = \frac{dQ}{T}$. Поскольку в рассматриваемом случае объем V постоянен, $dQ = dE$, и, следовательно, $dS = \frac{dE}{T} = 16\frac{V\sigma T^3}{c}dT$. Учитывая, что при T=0 энтропия S_0=0, после интегрирования окончательно получаем $S = \frac{16}{3}\frac{V\sigma T^3}{c} = 1 \ нДж/K$.

Задача 2.2 (№ 5.256/5.274)

Преобразовать формулу Планка для объемной спектральной плотности излучения u_ω от переменной ω к переменным ν (линейная частота) и λ (длина волны).

Энергия теплового излучения АЧТ в интервале частот [ω, ω+dω] может быть выражена через объемную спектральную плотность излучения

$$dE_\omega = u_\omega d\omega = u_\nu d\nu = u_\lambda d\lambda \,,$$

где u_ω описывается формулой Планка $u_\omega = \dfrac{\hbar\omega^3}{\pi^2 c^3}\dfrac{1}{\exp\left(\dfrac{\hbar\omega}{kT}\right)-1}$, а ω, ν и λ связаны соотношениями $\omega = 2\pi\nu$, $d\omega = 2\pi\, d\nu$ и $\omega = \dfrac{2\,\pi\, c}{\lambda}$, $d\omega = -\dfrac{2\pi\, c}{\lambda^2}d\lambda$, то есть выбранному положительному dω соответствует $d\lambda<0$. Таким образом, выражение для dE может быть переписано, соответственно, через dν и dλ :

$$dE = \frac{\hbar(2\pi\nu)^3}{\pi^2 c^3}\frac{1}{\exp\left(\dfrac{2\pi\hbar\nu}{kT}\right)-1}2\pi\, d\nu \text{ и } dE = \frac{\hbar}{\pi^2 c^3}\left(\frac{2\pi\, c}{\lambda}\right)^3\frac{1}{\exp\left(\dfrac{2\pi\hbar c}{kT\lambda}\right)-1}\frac{2\pi\, c}{\lambda^2}d\,\lambda \,,$$

откуда следует

$$u_\nu = \frac{16\pi^2\hbar}{c^3}\frac{\nu^3}{\exp\left(\dfrac{2\pi\hbar\nu}{kT}\right)-1} \text{ и } u_\lambda = \frac{16\pi^2\hbar c}{\lambda^5}\frac{1}{\exp\left(\dfrac{2\pi\hbar c}{kT\lambda}\right)-1}$$

Задача 2.3 (№ 5.259/5.277)

Найти с помощью формулы Планка выражения, определяющие число фотонов в 1 см^3 полости при температуре T в спектральных интервалах [ω, ω+dω] и [λ, λ+dλ].

Энергия единицы объема dE, приходящаяся на электромагнитные колебания с частотой ω, т.е. с энергией фотонов $\hbar\omega$, может быть выражена через объемную спектральную плотность излучения : $dE = u_\omega d\omega$. Число таких фотонов равно $dn_\omega = \frac{dE}{\hbar\omega}$, где частота связана с длиной волны соотношением $\omega = \frac{2\pi c}{\lambda}$.

Число фотонов с энергией в спектральном интервале [ω, ω+dω], находящихся в объеме полости V, равно

$$dN_\omega = dn_\omega V = \frac{\omega^3 V}{\pi^2 c^3} \frac{d\omega}{\exp\left(\frac{\hbar\omega}{kT}\right) - 1}.$$

Для нахождения числа фотонов в интервале [λ, λ+dλ] воспользуемся результатом задачи **2.2** для объемной спектральной плотности излучения u_λ :

$$dN_\lambda = dn_\lambda V = \frac{8\pi V}{\lambda^4} \frac{d\lambda}{\exp\left(\frac{2\pi\hbar c}{kT\lambda}\right) - 1}.$$