

Министерство общего и профессионального образования РФ

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ

Практические занятия

Санкт-Петербург
1997

Составители: А.Э.Васильев, Л.Г.Герчиков, В.В.Козловский,
А.В.Король, А.В.Соловьев, С.А.Шейнерман,

Колебания и волны: Практические занятия по курсу физики

/ Сост. А.Э.Васильев, Л.Г.Герчиков, В.В.Козловский,
А.В.Король, А.В.Соловьев, С.А.Шейнерман; СПб.:
Изд-во СПбГТУ, 1997. 38 с.

Сборник задач по курсу колебаний и волн предназначен для самостоятельной работы студентов физических факультетов, а также может быть использован при подготовке к проведению практических занятий по курсу общей физики. Данный сборник является продолжением методического руководства к решению задач по курсу общей физики [1, 2, 3]. Используются задачи из широко известных и доступных задачников [4-6]. Методические указания содержат два занятия по теме "Механические колебания", одно занятие по теме "Упругие волны" и два занятия по теме "Электромагнитные колебания и волны", что соответствует программе занятий III семестра ФМФ, ФТФ и РФФ.

Печатается по решению редакционно-издательского совета
Санкт-Петербургского государственного технического университета.

@ Санкт-Петербургский государственный технический университет,
1997

ВВЕДЕНИЕ

Настоящее методическое пособие является продолжением цикла практических занятий по курсу общей физики для физических специальностей. Опыт использования существующих пособий этого цикла [1, 2, 3] показал их практическую ценность как при подготовке семинарских занятий преподавателями, так и для самостоятельной работы студентов. В данное пособие включен материал, относящийся к различным видам колебательного движения, традиционно рассматриваемым в рамках курса общей физики:

1. Кинематика колебательного движения. Сложение гармонических колебаний.
2. Динамика механических колебаний. Вычисление частот механических колебаний. Колебания с несколькими степенями свободы.
3. Упругие волны. Звуковые колебания. Сферические и стоячие волны. Эффект Доплера
4. Электромагнитные волны. Напряженности электрического и магнитного полей. Объемная плотность энергии и плотность потока энергии в электромагнитной волне.
5. Излучение электромагнитных волн. Радиационное торможение электронов. Рассеяние света.

Совместное рассмотрение этих вопросов обусловлено общими закономерностями различных видов колебательных движений. В тоже время, данное пособие построено таким образом, чтобы отдельные её главы были в значительной степени независимы, что позволяет использовать её и в том случае, когда различные виды колебательного движения рассматриваются в разных разделах курса общей физики.

Рассмотренные в пособии задачи были выбраны нами из задачника И.Е. Иродова [4, 5], поскольку уровень сложности этого задачника в наибольшей степени соответствует уровню изучения физики на физических специальностях, и этот задачник традиционно используется при проведении практических занятий на факультетах ФМФ, ФТФ и РФФ. Каждая задача нумеруется двумя цифрами, разделенными точкой. Первая цифра означает номер занятия, вторая - номер задачи в пределах занятия. В скобках приводятся номер задачи по задачнику И.Е.Иродова. Для удобства мы приводим номера задач по двум наиболее часто используемым изданиям этого задачника [4, 5] разделенные знаком "/". Первый номер соответствует изданию [4], второй - [5]. В конце каждого занятия приводится список задач, предлагаемых для самостоятельного решения. В данном руководстве мы используем гауссову систему единиц, как наиболее естественную при рассмотрении электромагнитных явлений [6] и принятую при изучении курса физики на физических факультетах.

ЗАНЯТИЕ I

Тема занятия: Кинематика колебательного движения.

В предлагаемых задачах обсуждаются следующие вопросы:

- 1.1 - каноническое представление гармонических колебаний.
- 1.2 - связь колебательного движения и статистического подхода к изучению физических явлений.
- 1.3.- разложение двумерного колебательного движения на взаимно перпендикулярные гармонические составляющие.
- 1.4 - сложение двух однонаправленных гармонических колебаний с близкими частотами.

Задача 1.1 (4.2/4.2)

Некоторая точка движется вдоль оси x по закону $x = A \sin^2(\omega t - \pi/4)$.
Найти:

- а) амплитуду и период колебаний; изобразить график $x(t)$;
- б) проекцию скорости v_x как функцию координаты x ; изобразить график $v_x(x)$.

Решение

а) Преобразуем исходное уравнение к виду:

$$\begin{aligned}x &= A \sin^2(\omega t - \pi/4) = A/2(1 - \cos(2\omega t - 2\pi/4)) = \\ &= A/2(1 - \sin 2(\omega t)).\end{aligned}$$

Полученное уравнение описывает гармонические колебания с частотой 2ω и амплитудой $A/2$. Период этих колебаний равен $T = 2\pi/(2\omega) = \pi/\omega$. График зависимости $x(t)$ приведен на рисунке 1.1.

б) Проекция скорости определяется производной координаты частицы по времени

$$v_x = \frac{dx}{dt} = -A\omega \cos(2\omega t).$$

Возводя это соотношение в квадрат и учитывая, что $\sin^2(2\omega t) = (2x - A)^2/A^2$, получаем

$$v_x^2 = 4\omega^2 x(A-x).$$

График зависимости $v_x(x)$ (так называемая фазовая траектория) приведен на рисунке 1.2

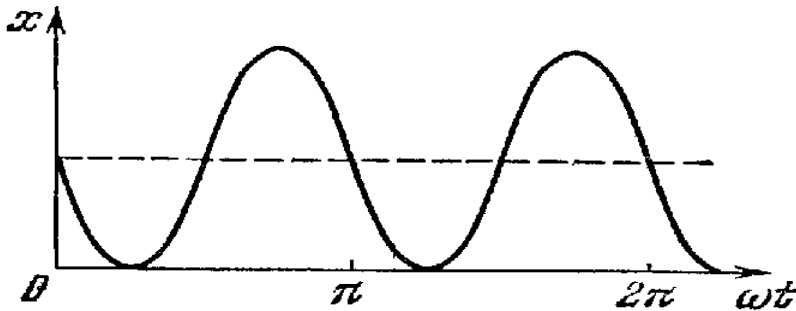


Рис. 1.1

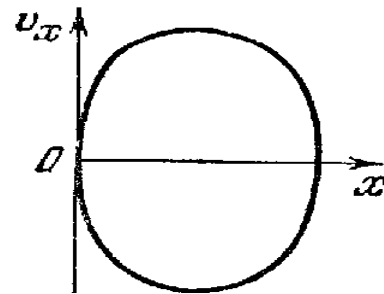


Рис. 1.2

Задача 1.2 (4.9/4.6.)

Частица совершает гармонические колебания вдоль оси x по закону $x = a \cos(\omega t)$. Считая вероятность P нахождения частицы в интервале от $-a$ до $+a$ равной единице, найти зависимость от x плотности вероятности dP/dx , где dP - вероятность нахождения частицы в интервале от x до $x + dx$. Изобразить график dP/dx в зависимости от x .

Решение

Вероятность обнаружить частицу в заданной области пространства пропорциональна интервалу времени, проводимому ей в этой области. Так для участка от x до $(x + dx)$:

$$dP(x, x + dx) \sim dt, \text{ или } dP(x, x + dx) = C dt,$$

где C - некоторая постоянная, которую можно определить впоследствии из условия нормировки вероятности. Выражая dt через dx и скорость частицы

$$v = \left| \frac{dx}{dt} \right| = a\omega |\sin(\omega t)| = a\omega \sqrt{1 - \cos^2(\omega t)} = \omega \sqrt{a^2 - x^2},$$

получаем

$$dP = C \frac{dx}{v} = C \frac{dx}{\omega \sqrt{a^2 - x^2}}.$$

Определим константу C из условия нормировки $\int dP = 1$ (частица с вероятностью $P=1$ находится в интервале $0 < x < a$):

$$1 = \frac{C}{\omega} \int_{-a}^{+a} \frac{d\left(\frac{x}{a}\right)}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}} = \frac{C}{\omega} \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) \Big|_{-a}^{+a} = \frac{C\pi}{\omega},$$

откуда $C = \omega/\pi$.

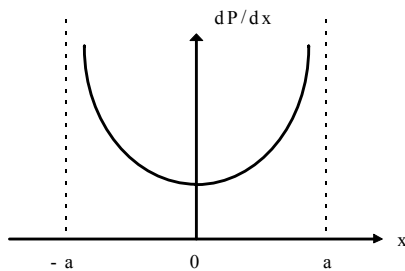


Рис 1.3

Таким образом, окончательно для плотности вероятности получаем выражение:

$$\frac{dP}{dx} = \frac{1}{\pi\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

График этой функции приведен на рисунке 1.3

Задача 1.3 (4.14/4.11)

Точка движется в плоскости xy по закону $x = A \sin \omega t$, $y = B \cos \omega t$, где A, B, ω - постоянные. Найти:

- уравнение траектории точки $y(x)$ и направление движения по этой траектории;
- ускорение точки в зависимости от ее радиус - вектора относительно начала координат.

Решение

Исключим параметр t из выражений для x и y . Для этого возведем их в квадрат и сложим:

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1.$$

Это и есть уравнение для траектории. Она представляет собой эллипс и изображена на рисунке 1.4. Направление движения можно определить из начальных условий. Начальное положение точки $x|_{t=0} = 0$; $y|_{t=0} = B$. Для проекций скорости получаются следующие выражения:

$$\begin{cases} v_x = \frac{dx}{dt} = A \omega \cos(\omega t) \\ v_y = \frac{dy}{dt} = -B \omega \sin(\omega t) \end{cases}$$

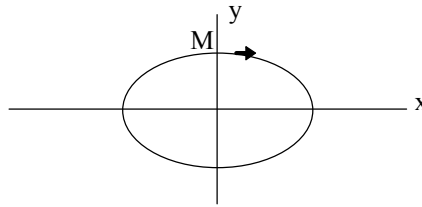


Рис. 1.4

Рассматривая совместно формулы для начального положения и начальной скорости, убеждаемся, что движение происходит против часовой стрелки.

Для нахождения ускорения продифференцируем проекции скорости по времени:

$$\begin{cases} w_x = \frac{dv_x}{dt} = -A \omega^2 \sin(\omega t) = -\omega^2 x(t) \\ w_y = \frac{dv_y}{dt} = -B \omega^2 \cos(\omega t) = -\omega^2 y(t) \end{cases}$$

Представляя ускорение в векторном виде, получим

$$\mathbf{w} = w_x \mathbf{i} + w_y \mathbf{j} = -\omega^2 (x \mathbf{i} + y \mathbf{j}) = -\omega^2 \mathbf{r} ,$$

где \mathbf{i}, \mathbf{j} - орты осей x и y , \mathbf{r} - радиус вектор точки.

Задача 1.4 (4.12/4.9)

При сложении двух гармонических колебаний одного направления результирующее колебание точки имеет вид: $x = a \cos(2,1t) \cos(50,0t)$, где t - в секундах. Найти круговые частоты складываемых колебаний и период биений результирующего колебания.

Решение

Рассмотрим два колебания одного направления и близких частот некоторой точки. Частоты этих колебаний равны, соответственно, ω и $\omega + \Delta\omega$, где $\Delta\omega \ll \omega$. Обозначив отклонения точки от положения равновесия через ξ_1 и ξ_2 , можно записать

$$\xi_1 = A \cos(\omega t) ; \xi_2 = A \cos((\omega + \Delta\omega)t) .$$

Суммарное колебание имеет вид:

$$\xi_{\Sigma} = \xi_1 + \xi_2 = \left\{ 2A \cos\left(\frac{\Delta\omega}{2}t\right) \right\} \cos\left(\left(\omega + \frac{\Delta\omega}{2}\right)t\right).$$

Из-за малости $\Delta\omega$ величина, взятая в фигурные скобки, медленно (относительно второго сомножителя) изменяется со временем. Поэтому можно условно считать величину

$$\left\{ 2A \cos\left(\frac{\Delta\omega t}{2}\right) \right\}$$

зависящей от времени *амплитудой* колебания, происходящего на частоте $(\omega + \Delta\omega/2)$.

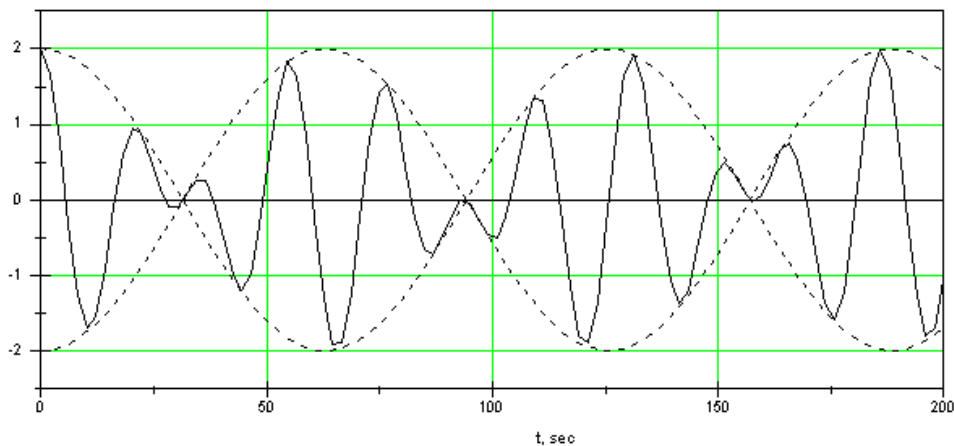


Рис. 1.5.

График зависимости от времени суммарного отклонения от положения равновесия $\xi_{\Sigma}(t)$ приведен на рисунке 1.5. Минимальное время, через которое повторяется отклонение точки на максимальную амплитуду, называется периодом биений. Для данного случая он равен

$$T_{\sigma} = \frac{2\pi}{\Delta\omega}.$$

Решая совместно два уравнения $\Delta\omega/2 = 2,1$ и $\omega + \Delta\omega/2 = 50,0$, находим

$$T_{\sigma} = 1,5 \text{ с и } \omega = 47,9 \text{ рад/с ; } \omega + \Delta\omega = 52,1 \text{ рад/с .}$$

Задачи, рекомендуемые по этой теме для домашнего задания: 4.3/4.3, 4.4/4.4, 4.13/4.10, 4.15/4.12.

ЗАНЯТИЕ 2

Тема занятия: Динамика колебательного движения.

При решении задач предполагается знание законов Ньютона и основных формул для нахождения энергии и вычисления работы. В предлагаемых задачах обсуждаются следующие вопросы:

- 2.1 - вычисление периода гармонических колебаний на для движения частицы в одномерном потенциальном поле.
- 2.2 - плоское колебательное движение частицы (двумерное движение);
- 2.3 - нахождение траектории движения частиц, совершающих два взаимно перпендикулярных колебания, с использованием простейших приемов решения систем дифференциальных уравнений;
- 2.4 - колебания физического маятника, нахождение средних значений;
- 2.5 - колебания систем с несколькими степенями свободы, обобщенные координаты.

Задача 2.1 (4.17/4.14)

Частица массой m находится в одномерном потенциальном поле, где ее потенциальная энергия зависит от координаты x как $U(x) = a/x^2 - b/x$, где a и b - некоторые положительные постоянные. Найти период малых колебаний частицы около положения равновесия.

Решение

Зная вид потенциальной энергии, можно определить силу, действующую на частицу в таком поле. Так как силовое поле одномерно, то

$$F(x) = -\frac{dU}{dx} = \frac{2a}{x^3} - \frac{b}{x^2}.$$

Для возникновения колебаний необходимо существование положения устойчивого равновесия. В данном случае такое положение будет в точке с координатой $x_0 = 2a/b$ (в этой точке сила $F(x_0)=0$). Раскладывая $F(x)$ в ряд вблизи точки x_0 и сохраняя лишь члены первого порядка малости по $x' = x - x_0$ (отклонению от положения равновесия), получаем:

$$F(x) = \frac{2a}{(x_0 + x')^3} - \frac{b}{(x_0 + x')^2} \cong -\frac{b}{x_0^3} x' = -\frac{b^4}{8a^3} x' = -kx',$$

где $k = b^4 / 8a^3$. Видно, что сила $F(x)$ подчиняется закону Гука. Отметим, что это справедливо только для малых колебаний точки, то есть когда $x' \ll x_0$. Тогда II закон Ньютона для рассматриваемого движения можно записать в виде

$$m \frac{d^2 x'}{dt^2} = -kx' \quad \text{или} \quad \ddot{x}' + \frac{k}{m} x' = 0.$$

Это уравнение гармонических колебаний с частотой $\omega_0^2 = k/m$ и периодом T , равным

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} = \frac{4\pi a}{b^2} \sqrt{2ma}.$$

Задача 2.2 (4.37/4.38)

Частица массы m движется под действием силы $\mathbf{F} = -\alpha m \mathbf{r}$, где α - положительная постоянная, \mathbf{r} - радиус-вектор частицы относительно начала координат. Найти траекторию ее движения, если в начальный момент $\mathbf{r} = r_0 \mathbf{i}$ и скорость $\mathbf{v} = v_0 \mathbf{j}$, где \mathbf{i} и \mathbf{j} - орты осей x и y .

Решение

Динамика любого механического движения, в том числе и колебательного, определяется II законом Ньютона. Применительно к данной задаче он выглядит так:

$$m\mathbf{a} = -\alpha m \mathbf{r}.$$

Проектируя это соотношение на оси x и y , получаем два уравнения:

$$\ddot{x} + \alpha x = 0; \quad \ddot{y} + \alpha y = 0. \quad (1)$$

Из условия задачи следуют начальные условия колебаний частицы:

$$\begin{aligned} x|_{t=0} &= r_0 & v_x|_{t=0} &= 0 \\ y|_{t=0} &= 0 & v_y|_{t=0} &= v_0 \end{aligned} \quad (2)$$

Общее решение уравнений (1) $x(t) = A \cos(\omega t + \beta)$; $y(t) = B \cos(\omega t + \gamma)$, где $\omega = \sqrt{\alpha}$. Учитывая начальные условия (2), получаем систему уравнений для определения неизвестных A , B , β и γ .

$$\begin{cases} A \cos \beta = r_0 \\ B \cos \gamma = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} -\omega A \sin \beta = 0 \\ -\omega B \sin \gamma = v_0 \end{cases}$$

Решая эту систему, находим

$$\beta = 0; \gamma = -\pi/2; A = r_0; B = \frac{v_0}{\omega} = \frac{v_0}{\sqrt{\alpha}}.$$

Тогда зависимость координат от времени примет следующий вид

$$\begin{aligned} x(t) &= r_0 \cos(\omega t), \\ y(t) &= \frac{v_0}{\omega} \sin(\omega t). \end{aligned}$$

Нетрудно исключить из этих уравнений время (см. Задачу 1.3), и в результате траектория частицы будет иметь вид эллипса:

$$\left(\frac{x}{r_0}\right)^2 + \left(\frac{y \sqrt{\alpha}}{v_0}\right)^2 = 1.$$

Это результат сложения двух взаимно перпендикулярных колебаний одинаковой частоты.

Задача 2.3 (4.42/4.44)

Частица массы m движется в плоскости xu силы, зависящей от скорости по закону

$\mathbf{F} = a(\dot{y}\mathbf{i} - \dot{x}\mathbf{j})$, где a - положительная постоянная, где \mathbf{i} и \mathbf{j} - орты осей x и y . В начальный момент $t = 0$ частица находилась в точке $x = y = 0$ и имела скорость \mathbf{v}_0 в направлении орта \mathbf{j} . Найти закон движения частицы $x(t)$, $y(t)$, а также уравнение ее траектории.

Решение

Запишем II закон Ньютона для заданного движения:

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = a \left(\frac{dy}{dt} \mathbf{i} - \frac{dx}{dt} \mathbf{j} \right)$$

и спроектируем это соотношение на оси x и y

$$\begin{cases} m \frac{d^2 x}{dt^2} = a \frac{dy}{dt} \\ m \frac{d^2 y}{dt^2} = -a \frac{dx}{dt} \end{cases} .$$

Полученную систему уравнений проще всего решать следующим образом. Преобразуем первое уравнение к виду

$$\frac{d}{dt} \left(m \frac{dx}{dt} - ay \right) = 0 .$$

Для того, чтобы это равенство было справедливо в любой момент времени, необходимо, чтобы функция, стоящая в скобках, не зависела от времени

$$m \frac{dx}{dt} - ay = \text{Const} = C_1 .$$

Определить значение константы C_1 можно из начальных условий. Так как $\frac{dx}{dt}|_{t=0} = y|_{t=0} = 0$, то для константы получаем значение $C_1 = 0$.

Полученное соотношение $m \frac{dx}{dt} = ay$ подставим во второе уравнение системы:

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = -\frac{a^2}{m} y \quad \text{или} \quad \ddot{y} + \frac{a^2}{m^2} y = 0 .$$

Это уравнение гармонических колебаний с частотой $\omega = \frac{a}{m}$, его решение

$$y(t) = A_y \text{Sin}(\omega t + \alpha_y) .$$

Из начальных условий $y|_{t=0} = 0$; $\frac{dy}{dt}|_{t=0} = v_0$, получаем $\alpha_y = 0$ и $A_y = \frac{mv_0}{a}$. Используя первое полученное соотношение $m \frac{dx}{dt} = ay$, находим $x(t)$:

$$x(t) = \frac{m v_0}{a} \int \sin(\omega t) d(\omega t) + C_2 = -\frac{m v_0}{a} \cos(\omega t) + C_2 .$$

Зная, что $x|_{t=0} = 0$, получаем для константы $C_2 = \frac{mv_0}{a}$ и $x(t) = \frac{mv_0}{a} (1 - \cos(\omega t))$. Исключая время из зависимостей $x(t)$ и $y(t)$, получаем уравнение траектории - окружность:

$$y^2 + \left(x - \frac{a}{mv_0}\right)^2 = \left(\frac{a}{mv_0}\right)^2 .$$

Задача 2.4 (4.47/4.51)

Однородный стержень массы m и длины L совершает малые колебания вокруг горизонтальной оси, проходящей через его верхний конец. Найти среднюю за период колебания кинетическую энергию стержня, если в начальный момент его отклонили от вертикали на угол θ_0 и сообщили ему угловую скорость $\dot{\theta}_0$.

Решение

Кинетическую энергию стержня можно определить по формуле $E_{кин} = \frac{J \dot{\theta}_0^2}{2}$, где $J = \frac{mL^2}{3}$ - момент инерции стержня относительно точки подвеса, а $\dot{\theta}$ - производная по времени от угла отклонения стержня от вертикали. Средняя за период кинетическая энергия стержня будет равна

$$\langle E_{кин} \rangle = \frac{m L^2}{6} \langle \dot{\theta}^2 \rangle$$

Для нахождения $\dot{\theta}(t)$ запишем основное уравнение вращательного движения связывающее вращающий момент M с угловым ускорением $\ddot{\theta}$:

$$J \frac{d^2\theta}{dt^2} = M = -m g \frac{L}{2} \theta .$$

После преобразований получаем

$$\ddot{\theta} + \frac{3}{2} g \theta = 0 .$$

Это уравнение гармонических колебаний с частотой $\omega_0^2 = 3g / 2L$. Его решения определяют угловое смещение стержня: $\theta = \theta_m \sin(\omega_0 t + \alpha_0)$, а $\dot{\theta} = \omega_0 \theta_m \cos(\omega_0 t + \alpha_0)$. Используя начальные условия $\theta|_{t=0} = \theta_0$ и $\dot{\theta}|_{t=0} = \dot{\theta}_0$, получаем $\theta_m^2 = \theta_0^2 + \frac{\dot{\theta}_0^2}{\omega_0^2}$. Среднее значение $\langle \dot{\theta}^2 \rangle$ теперь можно определить следующим образом

$$\langle \dot{\theta}^2 \rangle = \omega_0^2 \theta_m^2 \langle \cos^2(\omega_0 t + \alpha_0) \rangle = \frac{1}{2} \omega_0^2 \theta_m^2$$

Окончательно,

$$\langle E_{кин} \rangle = \frac{m L^2 \dot{\theta}_0^2}{12} + \frac{m g L \theta_0^2}{8} .$$

Задача 2.5 (4.61/4.67)

Модель молекулы CO_2 - три шарика, соединенные одинаковыми легкими пружинками и расположенные в положении равновесия вдоль одной прямой. Такая система может совершать продольные колебания двух типов, как показано стрелками на рисунке 2.1. Зная массы атомов, найти соотношение частот этих колебаний.

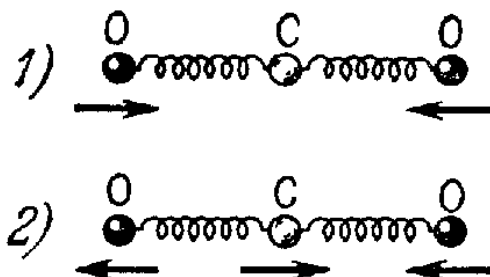


Рис. 2.1

Решение

В молекуле CO_2 возможны два вида колебаний - продольные и поперечные. Если рассматривать только продольные колебания, то их может быть всего два типа, изображенных на Рис. 2.1. Это означает, что по отношению к продольным колебаниям такая система обладает двумя колебательными степенями свободы. Следовательно, поведение такой системы может быть описано двумя величинами, которые будут изменяться со временем по гармоническому закону. Такие величины называются обобщенными координатами, а колебания, им соответствующие, - нормальными модами. Покажем, что изображенным на рисунке колебаниям соответствуют обобщенные координаты, являющиеся комбинацией смещений атомов из положений равновесия.

Потенциальная энергия молекулы в произвольный момент времени, когда смещения атомов С, O_1 и O_2 равны x_c , x_{o1} и x_{o2} , может быть определена как энергия двух сжатых пружин:

$$U(x_c, x_{o1}, x_{o2}) = \frac{k(x_{o1} - x_c)^2}{2} + \frac{k(x_{o2} - x_c)^2}{2}.$$

Вычисляя силы, действующие на атомы со стороны пружинок по формуле

$$F_i = - \frac{dU}{dx_i},$$

где i - индекс атома, получим уравнения движения для каждого атома:

$$\begin{cases} \frac{d^2 x_c}{dt^2} = - \frac{1}{m_c} \frac{dU}{dx_c} = \frac{1}{m_c} (k(x_{o1} - x_c) + k(x_{o2} - x_c)) \\ \frac{d^2 x_{o1}}{dt^2} = - \frac{1}{m_o} \frac{dU}{dx_{o1}} = - \frac{k}{m_o} (x_{o1} - x_c) \\ \frac{d^2 x_{o2}}{dt^2} = - \frac{1}{m_o} \frac{dU}{dx_{o2}} = - \frac{k}{m_o} (x_{o2} - x_c). \end{cases}$$

Напомним, что буквой k обозначается жесткость пружинки. Данная система уравнений содержит только два линейно независимых уравнения, описывающих колебания атомов. Это связано с тем, что при

колебаниях центр масс системы должен покоиться (внешних сил нет). Если из второго уравнения системы вычесть третье, то получим:

$$\frac{d^2(x_{o1} - x_{o2})}{dt^2} = -\frac{k}{m_o}(x_{o1} - x_{o2}).$$

Затем, сложив второе и третье уравнения системы, вычтем результат из первого уравнения умноженного на два. В результате получится уравнение вида

$$\frac{d^2}{dt^2}(2x_c - x_{o1} - x_{o2}) = -\frac{k(m_c + 2m_o)}{m_o m_c}(2x_c - x_{o1} - x_{o2}).$$

Если обозначить $q_1 = x_{o1} - x_{o2}$, $q_2 = 2x_c - x_{o1} - x_{o2}$, то эти величины и будут называться обобщенными координатами, а соответствующие им гармонические продольные колебания будут происходить с частотами

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m_o}}; \omega_2 = \sqrt{\frac{k(2m_o + m_c)}{m_c m_o}}.$$

Их отношение равно (с учетом масс атомов $m_o=16$ а.е.м. и $m_c=12$ а.е.м)

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \sqrt{1 + \frac{2m_o}{m_c}} = \sqrt{\frac{11}{3}} = 1,9.$$

Задачи, рекомендуемые по этой теме для домашнего задания: 4.23/4.22, 4.33/4.33, 4.43/4.57, 4.54/4.59, 4.59/4.64.

ЗАНЯТИЕ 3

Тема занятия: Упругие волны. Акустика.

В предлагаемых задачах рассматриваются следующие вопросы:

- 3.1 - уравнение волны;
- 3.2 - преобразование системы отсчета. Эффект Доплера;
- 3.3 - свойства сферических волн;
- 3.4 - поток энергии в волновых процессах;
- 3.5 - стоячие волны.

Задача 3.1(4.151/4.170).

Плоская гармоническая волна с частотой ω распространяется со скоростью v в направлении, составляющем углы α, β, γ с осями x, y, z . Найти разность фаз колебаний в точках среды с координатами x_1, y_1, z_1 и x_2, y_2, z_2 .

Решение.

Уравнение плоской волны, распространяющейся в произвольном направлении, задаваемом единичным вектором \mathbf{n} , образующим с осями координат x, y, z углы α, β, γ , имеет вид:

$$\xi(\mathbf{r}, t) = a \cos(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r} + \alpha)$$

Здесь волновой вектор \mathbf{k} определяется как $\mathbf{k} = \frac{2\pi}{\lambda} \mathbf{n}$. Тогда искомая разность фаз колебаний в точках \mathbf{r}_1 и \mathbf{r}_2 есть

$$\delta \varphi = \mathbf{k}\mathbf{r}_1 - \mathbf{k}\mathbf{r}_2 = k[(x_1 - x_2) \cos \alpha + (y_1 - y_2) \cos \beta + (z_1 - z_2) \cos \gamma].$$

Учитывая связь волнового числа k , скорости волны v и ее частоты ω : $k = \omega/v$, находим окончательно

$$\delta \varphi = \frac{\omega}{v} \left[(x_1 - x_2) \cos \alpha + (y_1 - y_2) \cos \beta + (z_1 - z_2) \cos \gamma \right].$$

Задача 3.2(4.153/4.173).

В среде К распространяется упругая плоская волна $\xi = a \cos(\omega t - kx)$. Найти уравнение этой волны в К'-системе отсчета, движущейся в положительном направлении оси x с постоянной скоростью V по отношению к среде К. Исследовать полученное выражение.

Решение.

Координата точки в направлении оси x в движущейся системе К' будет отличаться от координаты в неподвижной системе К: $x' = x - V t$. Для определения вида уравнения волны в системе отсчета К' выразим координату x в уравнении волны в системе отсчета К через значение координаты той же точки x' в подвижной системе отсчета К':

$$\xi = a \cos(\omega t - k(x' + Vt)) = a \cos((\omega - kV)t - kx')$$

Множитель перед величиной t в полученном выражении представляет собой по определению частоту волны ω' в подвижной системе отсчета К'

$$\omega' = (\omega - kV).$$

Видно, что в подвижной системе отсчета частота волны оказывается меньше чем в исходной системе К. Это изменение частоты известно как эффект Доплера. Действительно, если в последнем соотношении для частоты волны ω' выразить значение волнового вектора k через частоту волны ω и её скорость v , $k = \omega/v$, то мы получим известную формулу эффекта Доплера

$$\omega' = \omega \left(1 - \frac{V}{v} \right).$$

С увеличением скорости системы К' частота волны будет уменьшаться. Если скорость системы V превысит скорость волны v , частота ω' в уравнении волны формально становится отрицательной. Это означает, что фактически в системе К' волна теперь распространяется в противоположном направлении или, другими

словами, приемник в подвижной системе отсчета K' раньше зафиксирует колебания, испущенные источником колебаний системы K в более поздний момент времени.

Задача 3.3(4.158/4.179)

Найти радиус-вектор, характеризующий положение точечного источника сферических волн, если известно, что этот источник находится на прямой между точками с радиус-векторами \mathbf{r}_1 и \mathbf{r}_2 , в которых амплитуды колебаний частиц среды равны a_1 и a_2 . Затухание волны пренебрежимо мало, среда однородная.

Решение.

Уравнение сферической волны имеет вид:

$$\xi = \frac{a}{r} \cos(\omega t - k r + \alpha),$$

при этом амплитуда волны убывает обратно пропорционально длине радиуса-вектора \mathbf{r} , проведенного в выбранную точку. Пусть \mathbf{r} обозначает радиус-вектор, проведенный в точку, где расположен источник волны. Тогда вектора, проведенные из источника в точки, характеризующиеся радиус-векторами \mathbf{r}_1 и \mathbf{r}_2 , имеют вид: $\mathbf{R}_1 = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}$ и $\mathbf{R}_2 = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}$, соответственно. Амплитуды волны в этих точках равны $a_1 = \frac{a}{R_1}$ и $a_2 = \frac{a}{R_2}$. Отсюда находим связь между величинами векторов \mathbf{R}_1 и \mathbf{R}_2 $R_1 a_1 = R_2 a_2$. Учитывая, что вектора \mathbf{R}_1 и \mathbf{R}_2 направлены в противоположные стороны, имеем:

$$a_1 \mathbf{R}_1 = -a_2 \mathbf{R}_2.$$

Подставляя в последнее равенство выражения для векторов \mathbf{R}_1 и \mathbf{R}_2 находим выражение для радиус-вектора \mathbf{r} :

$$\mathbf{r} = \frac{a_1 \mathbf{r}_1 + a_2 \mathbf{r}_2}{a_1 + a_2}.$$

Задача 3.4(4.162/4.183)

Точечный изотропный источник звука находится на перпендикуляре к плоскости кольца, проходящем через его центр O . Расстояние между точкой O и источником $l = 1,00$ м, радиус кольца $R = 0,50$ м. Найти средний поток энергии через площадь, ограниченную кольцом, если в точке O интенсивность звука $I_0 = 30$ мкВт/м². Затухание волн пренебрежимо мало.

Решение.

Полный поток энергии через площадь S , ограниченную кольцом, выражается интегралом от вектора плотности потока энергии \mathbf{j} :

$$W = \int d w = \int_S \mathbf{j} \mathbf{d s}$$

Разобьем всю площадь, ограниченную кольцом, на малые зоны кольцевой формы радиусом r и толщиной dr . Площадь такой зоны, находящейся на расстоянии r от центра кольца, равна $ds = 2\pi r dr$. Найдем поток энергии через такую зону dw . При этом учтем, что величина вектора плотности потока энергии меняется в зависимости от расстояния до центра кольца. Это связано с тем, что с возрастанием расстояния r увеличивается расстояние от источника звука до выбранной кольцевой зоны. Так как источник звука изотропен, он испускает сферическую волну. Амплитуда сферической волны убывает обратно пропорционально расстоянию до точки наблюдения. Поскольку плотность энергии пропорциональна квадрату амплитуды волны, плотность потока энергии обратно пропорциональна квадрату расстояния от источника до точки наблюдения. Интенсивность звука в центре кольца, расположенном на расстоянии l от источника звука, равна I_0 . Поэтому интенсивность волны в точках кольцевой зоны, расположенной на расстоянии r от центра кольца. Есть

$$I = I_0 \frac{l^2}{y^2},$$

где $y = \sqrt{l^2 + r^2}$ - расстояние от источника звука до точек выбранной кольцевой зоны. Поэтому

$$d w = \mathbf{j} \mathbf{d s} = j \cos \varphi ds = \frac{I_0 l}{l^2 + r^2} \frac{l}{\sqrt{l^2 + r^2}} 2\pi r dr .$$

Здесь угол φ есть угол между нормалью к кольцевой зоне и вектором плотности потока энергии в точках выбранной зоны. Подставляя полученное выражение для потока энергии через бесконечно малую площадь ds в выписанный выше интеграл, найдем для полного потока энергии:

$$w = \int_s dw = 2\pi I_0 l^3 \int_0^R \frac{r dr}{(l^2 + r^2)^{3/2}} .$$

Выполняя интегрирование, найдем окончательно для потока энергии w :

$$w = 2\pi I_0 l^2 \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{l}{R}\right)^2}} \right)$$

Подставляя численные данные в полученное соотношение, найдем величину среднего потока энергии через площадь, ограниченную кольцом $w = 20$ мкВт.

Задача 3.5(4.169/4.169)

Для определения скорости звука в воздухе методом акустического резонанса используется труба с поршнем и звуковой мембраной, закрывающей один из ее торцов. Найти скорость звука, если расстояние между соседними положениями поршня, при которых наблюдается резонанс на частоте $n = 2000$ Гц, составляет $l = 8,5$ см.

Решение.

При возбуждении звуковых колебаний в трубе образуется стоячая волна, при этом у поршня, закрывающего один из концов, всегда располагается узел. Если длина трубы такова, что в месте расположения звуковой мембраны, находится пучность волны, то колебания мембраны будут наибольшими - наступает акустический резонанс. Поскольку расстояние между узлами стоячей волны составляет $\frac{\lambda}{2}$, где λ - длина звуковой волны, а расстояние между пучностью и ближайшим узлом есть $\frac{\lambda}{4}$, то условие наступления резонанса можно записать в виде:

$$L = n \frac{\lambda}{2} + \frac{\lambda}{4},$$

т.е. на длине трубы L укладывается n узлов плюс одна пучность. Длина трубы зависит от положения поршня. Два соседних положения поршня, при которых наблюдается резонанс, отличаются тем что на длине трубы появляется еще один узел. Поэтому

$$l = L_{n+1} - L_n = \frac{\lambda}{2}$$

Учитывая связь длины волны с частотой и скоростью звука $\lambda = \frac{v}{\nu}$, найдем выражение для скорости звука через разность длин l трубы, при которых наступает резонанс:

$$v = 2lv = 2 \cdot 0.085 \cdot 2000 = 340 \text{ м/с.}$$

Задачи, рекомендуемые по этой теме для домашнего задания:
4.152/4.172, 4.157/4.178, 4.163/4.184, 4.170/4.197, 4.178/2.207,
4.186/4.215.

ЗАНЯТИЕ 4

Тема занятия: Электромагнитные волны. Напряженности электрического и магнитного полей, объемная плотность энергии и плотность потока энергии (вектор Пойнтинга) в электромагнитной волне.

В предлагаемых задачах рассматриваются следующие вопросы:

- 4.1- свободные электромагнитные колебания в вакууме, плоская бегущая волна;
- 4.2- плоская стоячая волна;
- 4.3- вынужденные электромагнитные колебания возбуждаемые в ограниченных по объему системах, размер которых много меньше длины электромагнитной волны.

4.4- электромагнитные волны в волноводе; фазовая и групповая скорость.

Задача 4.1 (4.196/4.224)

Найти средний вектор Пойнтинга $\langle \mathbf{S} \rangle$ у плоской электромагнитной волны с электрической составляющей $\mathbf{E} = E_0 \cos(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r})$, если волна распространяется в вакууме.

Решение

Как известно плоские электромагнитные волны в вакууме являются поперечными $\mathbf{k}\mathbf{E} = 0$. Направим координатную ось x вдоль волнового вектора электромагнитной волны \mathbf{k} , а ось y вдоль вектора напряженности электрического поля \mathbf{E} :

$$E_y = E_0 \cos(\omega t - kx), \quad E_x = 0, \quad E_z = 0.$$

Найдем вектор индукции магнитного \mathbf{B} поля с помощью одного из уравнений Максвелла

$$\text{rot}\mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}.$$

Согласно определению оператора ротора в выбранной нами системе координат имеется только одна отличная от нуля компонента $\text{rot}\mathbf{E}$, направленная вдоль оси z

$$(\text{rot}\mathbf{E})_z = \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}.$$

Поэтому

$$\frac{\partial B_z}{\partial t} = -ckE_0 \sin(\omega t - kx).$$

Учитывая, что $\omega = ck$, получим из последнего равенства

$$B_z = E_0 \cos(\omega t - kx),$$

или записывая в векторном виде

$$\mathbf{B} = \frac{1}{k} [\mathbf{kE}].$$

Полученное уравнение показывает, что вектор напряженности магнитного поля перпендикулярен как вектору \mathbf{k} так и вектору \mathbf{E} , причем $B = E$.

Согласно определению вектора Пойнтинга $\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} [\mathbf{EH}]$ найдем, что

$$\mathbf{S} = \frac{c\mathbf{k}}{4\pi k} E_0^2 \cos^2(\omega t - kx).$$

Здесь мы учли, что в вакууме $\mathbf{H} = \mathbf{B}$. Поскольку в среднем по времени $\langle \cos^2(\omega t - kx) \rangle = 1/2$, то мы получаем в итоге, что

$$\langle \mathbf{S} \rangle = \frac{c\mathbf{k}}{8\pi k} E_0^2$$

Полезно сравнить выражение для вектора Пойнтинга \mathbf{S} с объемной плотностью энергии в электромагнитной волне

$$w = \frac{\mathbf{E}^2}{8\pi} + \frac{\mathbf{B}^2}{8\pi} = \frac{E_0^2}{4\pi} \cos^2(\omega t - kx).$$

Данное выражение показывает, что объемная плотность энергии периодически меняется в пространстве и во времени, перемещаясь со скоростью света в направлении волнового вектора. Действительно, сравнивая это выражение с вектором Пойнтинга, легко видеть, что в плоской бегущей электромагнитной волне

$$\mathbf{S} = c \frac{\mathbf{k}}{k} w.$$

Задача 4.2 (4.199-200/4.230-231)

В вакууме в направлении оси x установилась стоячая электромагнитная волна, электрическая составляющая которой

$$\mathbf{E} = E_0 \cos(\omega t) \cos(kx).$$

Найти магнитную составляющую волны $\mathbf{B}(x, t)$. Изобразить примерную картину распределения электрической и магнитной составляющей волны (\mathbf{E} и \mathbf{B}) в моменты $t = 0$ и $t = T / 4$ где $T = 2\pi / \omega$ - период колебаний. Найти вектор Пойнтинга и его среднее за период колебаний значение.

Решение

Выберем координатные оси так же как и при решении предыдущей задачи (ось x вдоль волнового вектора электромагнитной волны \mathbf{k} , а ось y вдоль вектора напряженности электрического поля \mathbf{E}). Пользуясь тем же уравнением Максвелла получим дифференциальное уравнение для определения $\mathbf{B}(x, t)$

$$\frac{\partial B_z}{\partial t} = ckE_0 \cos(\omega t) \sin(kx),$$

откуда, учитывая, что $\omega = ck$, получим

$$B_z = E_0 \sin(\omega t) \sin(kx).$$

Индукция магнитного поля в стоячей электромагнитной волне так же оказывается перпендикулярна напряженности электрического поля, однако, теперь колебания электрической и магнитной составляющих происходят со сдвигом во времени. В нулевой момент времени $t = 0$ индукция магнитного поля равна нулю, а амплитуда колебаний электрической компоненты максимальна. Координатная зависимость напряженности электрического поля в этот момент времени представлена на Рис. 4.1 сплошной линией. В момент времени $t = T / 4$ наоборот, напряженность электрического поля равна нулю, а амплитуда колебаний магнитной компоненты максимальна. На Рис. 4.1 зависимость \mathbf{B} от x при $t = T / 4$ изображена пунктирной линией. Отметим, что пучности колебаний электрической компоненты смещены относительно пучностей магнитной компоненты на четверть длины волны $\lambda / 4 = \pi / 2k$. Таким образом, энергия стоячей электромагнитной волны $w = (\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2) / 8\pi$ периодически переходит из электрической формы в магнитную совершая при этом небольшие перемещения в пределах $\lambda / 4$. Среднее же по времени значение объемной плотности энергии $\langle w \rangle$ постоянно в пространстве и равно $\langle w \rangle = E_0^2 / 8\pi$.

Соответственно вектор Пойнтинга должен совершать периодические колебания в направлении оси x . Действительно, подставляя значения напряженности электрического и магнитного поля в выражение для вектора Пойнтинга, получим, что

$$\mathbf{S} = \frac{c\mathbf{k}}{16\pi k} E_0^2 \sin(2\omega t) \sin(2kx),$$

а среднее значение $\langle \mathbf{S} \rangle = 0$.

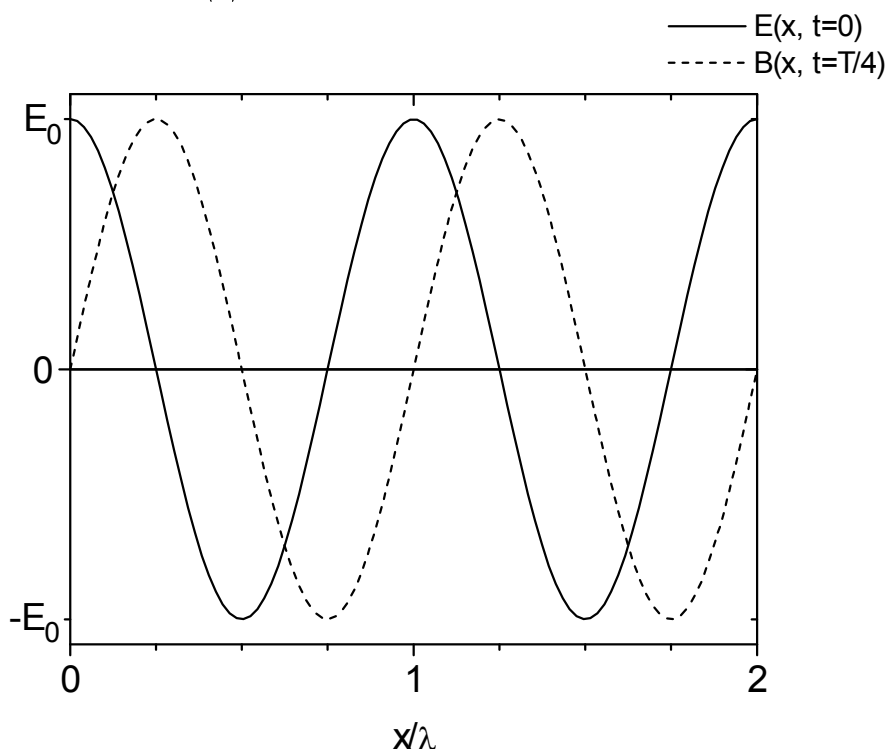


Рис. 4.1

Задача 4.3 (4.201/4.232)

Плоский воздушный конденсатора, обкладки которого имеют форму дисков радиуса $R = 6\text{ см}$, подключен к переменному синусоидальному напряжению частоты $\omega = 1000\text{ с}^{-1}$. Найти отношение амплитудных значений магнитной и электрической энергии внутри конденсатора. Считать, что толщина зазора между обкладками конденсатора много меньше чем R .

Решение

В силу того, что размеры конденсатора много меньше длины волны свободных электромагнитных колебаний с частотой ω , $\lambda = 2\pi c / \omega \cong 2 \cdot 10^8$ см, электрическое поле в конденсаторе будет слабо отличаться от однородного поля возникающего в статическом случае, т.е. $E = U / d$, где U - приложенное напряжение, а d - ширина зазора между пластинами. Мы так же можем пренебречь искажением электрического поля на краях конденсатора, поскольку $d \ll R$. По условию задачи $U = U_0 \sin(\omega t)$, поэтому мы можем записать напряженность электрического поля в виде

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \sin(\omega t),$$

где вектор \mathbf{E}_0 направлен вдоль оси конденсатора, а его величина определяется амплитудой колебаний приложенного напряжения $E_0 = U_0 / d$.

Согласно уравнению Максвелла

$$\oint \mathbf{B} d\mathbf{l} = \frac{4\pi}{c} I + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \int \mathbf{E} ds$$

переменное электрическое поле вызывает в конденсаторе вихревое магнитное поле, силовые линии которого представляют собой концентрические окружности. Отметим, что внутри конденсатора $I = 0$. Если выбрать в качестве контура интегрирования окружность радиуса r с центром на оси конденсатора, то из данного уравнения следует, что

$$2\pi rB = \frac{1}{c} \pi r^2 \frac{\partial}{\partial t} E$$

Найдем с помощью этого уравнения зависимость индукции магнитного поля от расстояния от оси конденсатора

$$B = \frac{\omega r}{2c} E_0 \cos(\omega t).$$

Легко видеть, что возникающее магнитное поле намного слабее электрического. Действительно, отношение их амплитудных значений $B_0 / E_0 = \omega r / 2c \leq \omega R / 2c \approx R / \lambda \ll 1$.

Энергии электрического и магнитного поля, W_e и W_m , найдем, интегрируя их объемные плотности $w_e = E^2 / 8\pi$ и $w_m = B^2 / 8\pi$ по объему конденсатора

$$W_e = (dR^2 E_0^2 / 8) \sin^2(\omega t)$$

$$W_m = (\omega^2 dR^4 E_0^2 / 64c^2) \cos^2(\omega t)$$

Таким образом, отношение их амплитудных значений оказывается очень малой величиной $\omega^2 R^2 / 8c^2 = 5 \cdot 10^{-15}$. Отметим здесь для сравнения, что для свободных электромагнитных волн в вакууме это отношение равно единице (см. задачи (4.1) и (4.2)).

Задача 4.4

Найти электрическую и магнитную составляющие собственных электромагнитных колебаний в металлическом волноводе, поперечное сечение которого представляет собой квадрат со стороной a . Определить групповую и фазовую скорость распространения электромагнитных волн вдоль оси волновода.

Решение

В этой задаче необходимо найти такое электромагнитное поле, которое бы удовлетворяла волновому уравнению внутри волновода

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}$$

а также определенным граничным условиям на его поверхности. Будем считать, что электромагнитное поле практически не проникает внутрь металла. Тогда граничными условиями будут равенства нулю нормальной компоненты магнитного поля \mathbf{B} и тангенциальной компоненты электрического поля \mathbf{E} на поверхности стенок волновода.

Направим координатную ось x вдоль оси волновода а оси y и z вдоль его стенок. Общим решением волнового уравнения является, как известно, произвольная суперпозиция плоских волн. Рассмотрим для начала волну двигающуюся в плоскости xu под произвольным углом ϑ к оси волновода. Она схематически изображена на Рис. 4.2 под цифрой 1. Пусть эта волна поляризована таким образом, что вектор напряженности электрического поля направлен вдоль оси z . Тогда напряженность электрического поля имеет следующий вид $\mathbf{E}_1 = \mathbf{E}_0 \cos(\omega t - k_x x + k_y y)$, где \mathbf{E}_0 - произвольный амплитудный вектор, направленный вдоль оси z , величины k_x, k_y положительны. Знак минус перед k_y связан с тем, что волна 1 движется в

отрицательном направлении оси y . Частота колебаний связана с волновым вектором дисперсионным соотношением $\omega = c\sqrt{k_x^2 + k_y^2}$.

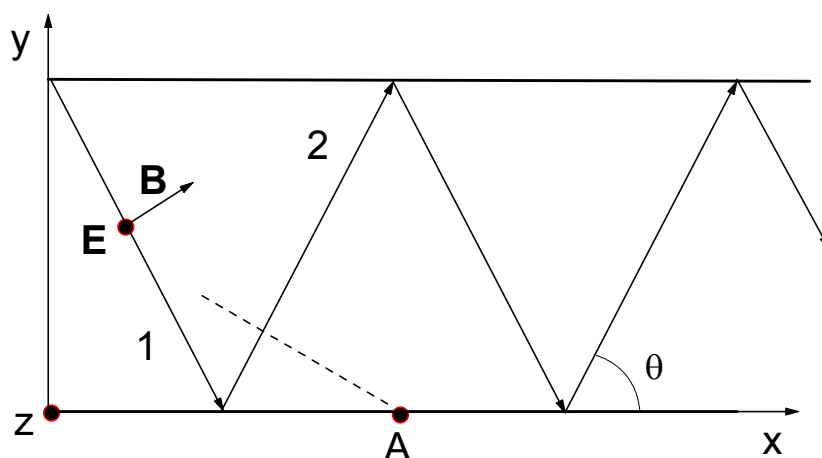


Рис. 4.2

Однако при отражении от стенки волновода $y = 0$ возникнет вторая, отраженная, волна $\mathbf{E}_2 = -\mathbf{E}_0 \cos(\omega t - k_x x - k_y y)$. У отраженной волны изменился знак компоненты волнового вектора перпендикулярной к стенке волновода k_y , а также знак вектора амплитуды колебаний \mathbf{E}_0 . Последнее следует из граничных условий. Действительно, при этом напряженность суммарного электрического поля

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 = -2\mathbf{E}_0 \sin(\omega t - k_x x) \sin(k_y y)$$

оказывается равна нулю на нижней стенке волновода $y = 0$. Можно убедиться в том, что при этом автоматически выполняется и другое граничное условие, обращается в нуль нормальная к стенке волновода компонента магнитного поля. Для выполнения этих граничных условий на противоположной стенке волновода $y = a$ следует потребовать чтобы

$$k_y a = \pi n, n = 0, 1, 2, \dots$$

Таким образом, в направлении оси y возникает как в резонаторе стоячая волна. Данное условие равносильно требованию того, чтобы в резонаторе укладывалось целое число (n) полуволн. В результате напряженность электрического поля представляет собой произведение бегущей волны в направлении оси волновода и стоячей волны в поперечном направлении

$$E = -2E_0 \sin(\omega t - k_x x) \sin(\pi n y / a),$$

а частота собственных колебаний оказывается равной

$$\omega = c\sqrt{k_x^2 + (\pi n / a)^2}.$$

Отметим, что напряженность электрического поля оказалась перпендикулярна оси волновода, в то время как индукция магнитного поля имеет и продольную составляющую. Индукцию магнитного поля проще всего искать как суперпозицию магнитных полей волн 1 и 2:

$$B_y = B_{1y} + B_{2y} = -E_0 \cos \vartheta \cos(\omega t - k_x x + k_y y) + E_0 \cos \vartheta \cos(\omega t - k_x x - k_y y) = 2E_0 \cos \vartheta \sin(\omega t - k_x x) \sin(\pi n y / a)$$

$$B_x = B_{1x} + B_{2x} = -E_0 \sin \vartheta \cos(\omega t - k_x x + k_y y) + E_0 \sin \vartheta \cos(\omega t - k_x x - k_y y) = -2E_0 \sin \vartheta \cos(\omega t - k_x x) \cos(\pi n y / a),$$

где ϑ - угол между осью волновода и направлением распространения волн 1 и 2, $\cos \vartheta = k_x / \sqrt{k_x^2 + (\pi n / a)^2}$. Данный тип колебаний называется ТЕ волны. Имеется еще один тип решений, ТМ волны, в которых магнитное поле поперечно, а электрическое поле имеет продольную компоненту. Решение, соответствующее ТМ волнам, находится аналогичным образом.

Фазовую и групповую скорости движения электромагнитных волн вдоль оси волновода найдем как

$$v_{\phi} = \frac{\omega}{k_x} = c \frac{\sqrt{k_x^2 + (\pi n / a)^2}}{k_x}$$

$$v_g = \frac{d\omega}{dk_x} = c \frac{k_x}{\sqrt{k_x^2 + (\pi n / a)^2}}.$$

Отметим, что фазовая скорость оказывается больше скорости света. Однако, это не противоречит теории относительности, поскольку

фазовая скорость есть скорость перемещения геометрической точки пересечения стенки волновода и поверхности волнового фронта (точка А на Рис.4.2), а не реального физического объекта. Действительно, скорость этой точки $c / \cos \vartheta$ совпадает с фазовой скоростью. Скорость же распространения электромагнитных колебаний вдоль оси волновода определяется групповой скоростью, которая меньше скорости света. Отметим, что её значение равно проекции скорости волн 1 и 2 на ось волновода $v_g = c \cos \vartheta$.

Задачи, рекомендуемые по этой теме для домашнего задания: 4.192/4.221, /4.228, 4.202/4.233, 4.203/4.234, 4.206/2.37, 4.209/4.240.

ЗАНЯТИЕ 5

Тема занятия: дипольное излучение электромагнитных волн.

В предлагаемых задачах рассматриваются следующие вопросы:

- 5.1- радиационное торможение электрона совершающего финитное движение в поле силового центра.
- 5.2- угловое распределение дипольного излучения.
- 5.3- сечение Релеевского рассеяния света на электроны.
- 5.4- связь между плотностью потока энергии и импульса электромагнитного излучения.

Задача 5.1 (4.212/4.249)

Найти среднюю мощность излучения электрона совершающего гармонические колебания с амплитудой $A = 10^{-8}$ см и частотой $\omega = 2 \cdot 10^{16}$ с⁻¹.

Решение

Мощность излучения в дипольном приближении определяется выражением

$$P = \frac{2e^2 a^2}{3c^3},$$

где $a = -\omega^2 A \cos(\omega t + \alpha)$ - ускорение электрона, совершающего гармонические колебания. Принимая во внимание, что $\langle \cos^2(\omega t + \alpha) \rangle = 1/2$, найдем, что средняя мощность излучения равна

$$\langle P \rangle = \frac{e^2 \omega^4 A^2}{3c^3}.$$

Подставляя численные значения, приведенные в условии задачи, получим $\langle P \rangle = 0.05$ эрг/с.

Интересно проследить зависимость мощности излучения от времени. Дело в том, что вследствие потерь энергии на излучение колебания фактически являются затухающими. Однако, из-за слабости сил лучистого трения, время затухания оказывается большим по сравнению с периодом колебаний. Поэтому мы можем пользоваться полученным выше выражением для средней за период мощности излучения, понимая теперь под $A = A(t)$ плавную зависимость амплитуды затухающих колебаний от времени. Таким образом, мы можем записать, что скорость уменьшения энергии колебаний равна

$$\frac{dE}{dt} = -\langle P \rangle = -\frac{2e^2 \omega^2}{3c^3 m} E.$$

В последнем равенстве мы воспользовались тем, что энергия гармонических колебаний равна

$$E = \frac{m \omega^2 A^2}{2}.$$

Решением данного дифференциального уравнения является экспоненциальная зависимость энергии колебаний от времени

$$E = E_0 e^{-t/\tau},$$

где E_0 - начальная энергия колебаний, а $\tau = 3c^3 m / 2e^2 \omega^2$ - время затухания колебаний. Фактически величина τ определяет время излучения электрона. Действительно, поскольку $A \propto E^{1/2}$, то $A(t) = A_0 \exp(t/2\tau)$ и следовательно мощность излучения также убывает по экспоненциальному закону

$$P(t) = P_0 \exp(-t/\tau).$$

Если в качестве ω использовать характерное значение частоты обращения электрона в атоме, приведенное в условии задачи, то мы получим хорошую оценку времени излучения атома $\tau \approx 4 \cdot 10^{-10}$ с.

Задача 5.2 (4.223/)

Плоская монохроматическая волна с частотой ω падает на упруго связанный электрон. Собственная частота колебаний электрона равна ω_0 . Найти отношение энергии электромагнитного излучения рассеиваемой электроном в единицу времени к плотности потока энергии в падающей волне.

Решение

Найдем закон движения электрона $\mathbf{r}(t)$ в осцилляторе под действием электрического поля падающей волны $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \cos(\omega t)$. Запишем уравнение движения

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\omega_0^2 \mathbf{r} - \frac{e\mathbf{E}_0}{m} \cos(\omega t)$$

Его решение соответствующие установившимся вынужденным колебаниям имеют вид

$$\mathbf{r} = \frac{e\mathbf{E}_0 \cos(\omega t)}{m(\omega^2 - \omega_0^2)}$$

Зная ускорение электрона, $\ddot{\mathbf{r}}$, можно найти энергию, излучаемую электроном в единицу времени

$$P = \frac{2e^2 \ddot{\mathbf{r}}^2}{3c^3} = \frac{2e^4 \omega^4}{3c^3 m^2 (\omega^2 - \omega_0^2)^2} \mathbf{E}_0^2 \cos^2(\omega t).$$

Отношение этой энергии к плотности потока энергии в падающей волне $S = c\mathbf{E}^2 / 4\pi$ имеет размерность площади и является фактически сечением σ рассеяния электромагнитной волны на электроне

$$\sigma = \frac{P}{S} = \pi r_0^2 \frac{8\omega^4}{3(\omega^2 - \omega_0^2)^2},$$

где $r_0 = e^2 / mc^2 = 2.82 \cdot 10^{-10}$ см - классический радиус электрона.

Для длинноволновых электромагнитных колебаний $\omega \ll \omega_0$ сечение рассеяния оказывается пропорционально ω^4 (закон Релея). Это объясняет голубую окраску неба. Действительно, коротковолновая часть солнечного излучения, т.е. голубой и синий свет, сильно рассеивается в атмосфере Земли, в то время как красный и желтый свет рассеивается слабее и попадает на поверхность Земли в виде прямых солнечных лучей.

В обратном случае $\omega \gg \omega_0$ собственной частотой колебаний электрона можно пренебречь, и мы получаем сечение рассеяния света свободным электроном $\sigma = 8\pi r_0^2 / 3$.

Задача 5.3 (4.210/4.255)

Средняя мощность, излучаемая элементарным диполем, равна P . Найти среднюю объемную плотность энергии электромагнитного поля в вакууме в волновой зоне на луче, перпендикулярном оси диполя, на расстоянии r от него.

Решение

Плотность потока электромагнитной энергии излучаемой диполем S связана с объемной плотностью энергии w простым соотношением $S = cw$. Это соотношение было получено в задаче 4.1 для плоской электромагнитной волны. Однако оно справедливо и для сферической расходящейся волны в волновой зоне ($r \gg \lambda$), поскольку в каждой точке этой волны волновой фронт можно считать плоским. Угловая зависимость w определяется угловой зависимостью напряженности электрического поля дипольного излучения $E \propto \sin(\vartheta)$, где ϑ - угол между направлением излучения и направлением колебаний диполя. Поскольку $w \propto E^2$ мы можем записать, что

$$w = w_0 \sin^2(\vartheta),$$

где w_0 - объемной плотностью энергии на луче, перпендикулярном оси диполя. Мощность дипольного излучения можно найти интегрируя плотность потока энергии S через сферическую поверхность радиуса r

$$P = \int S ds = cw_0 r^2 \int \sin^2(\vartheta) d\Omega,$$

Вычислив интеграл $\int \sin^2(\vartheta) d\Omega = 8\pi/3$, найдем искомую связь между P и w_0

$$w_0 = 3P / 8\pi r^2.$$

Задача 5.4 (4.224/4.258)

Считая, что частица имеет форму шарика и поглощает весь, падающий на неё свет, найти радиус частицы, при котором гравитационное притяжение её к Солнцу будет компенсироваться силой светового давления. Мощность светового излучения Солнца $P = 4 \cdot 10^{26}$ Вт, плотность частицы $\rho = 1$ г/см³.

Решение

Энергия и импульс фотона связаны между собой через скорость света $\varepsilon = cp$. Важно, что это соотношение справедливо для всех фотонов, независимо от их энергий. Поэтому это соотношение применимо и для плотностей потока энергии и импульса всего излучения Солнца в целом. Выразим, пользуясь этим соотношением, силу светового давления на частицу через поглощаемую частицей в единицу времени энергию излучения.

$$F = \frac{1}{c} \int S ds = \frac{1}{c} \pi r^2 S,$$

где S - плотность потока энергии, r - радиус частицы, интегрирование проводится по поверхности частицы, обращенной к солнцу. Полная мощность излучения Солнца равна $P = 4\pi R^2 S$, где R - расстояние частицы от Солнца. Поэтому

$$F = \frac{1}{c} \frac{Pr^2}{4R^2}.$$

Приравняв силу светового давления силе гравитационного притяжения к солнцу

$$F = \gamma \frac{mM}{R^2},$$

где $m = 4\pi r^3 \rho / 3$ - масса частицы, $M = 2 \cdot 10^{33}$ г - масса Солнца, $\gamma = 6.67 \cdot 10^{-8}$ см³/(г с²) гравитационная постоянная, получим условие для радиуса частицы, при котором гравитационное притяжение её к Солнцу будет скомпенсировано силой светового давления

$$r = \frac{3P}{16\pi c \gamma \rho M} \approx 0.6 \text{ мкм.}$$

Задачи, рекомендуемые по этой теме для домашнего задания: 4.11/4.248, 4.213/4.250, 4.216/4.252, 4.217/4.253, 4.220/4.256, 4.221/4.257.

Литература

1. Иванов В.К., Харченко В.А. Классическая механика. Практические занятия.- Л.: Ленинградский политехнический институт, 1990. - 46 с.
2. Иванов В.К., Колгатин С.Н., Харченко В.А. Специальная теория относительности. Практические занятия. - Л.: Ленинградский государственный технический университет, 1991. - 24 с.
3. А.Э.Васильев, Л.Г.Герчиков, В.В.Козловский, А.В.Соловьев, С.А.Шейнерман Электростатика и постоянный ток: Практические занятия по курсу физики. - С.-Петербургский гос.тех.нниверситет, 1997. -37 с.
4. Иродов И.Е. Задачи по общей физике. - М.: Наука, 1979 - 368 с.
5. Иродов И.Е. Задачи по общей физике. - М.: Наука, 1988 - 416 с.
6. Сивухин Д.В. Общий курс физики. Электричество. М: Наука, 1983 - 688 с.

Содержание

Введение	3
Занятие 1.	4
Занятие 2.	9
Занятие 3.	17
Занятие 4.	22
Занятие 5.	31
Литература	36

